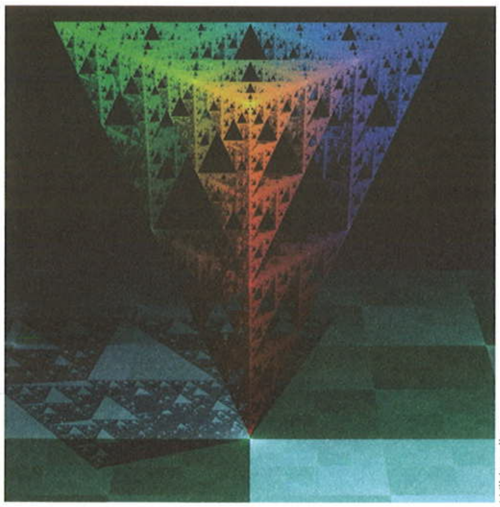
Sumário

Avaliações

Anotações

Matemática

Progressões



Wikimedia

Sequências

Quando podemos estabelecer uma certa ordem para os elementos de um conjunto, dizemos que esses elementos formam uma **sequência** ou **sucessão**. Um elemento, ou termo, de uma sequência é indicado por a_n, onde o índice $n \in N^*$ representa a posição ocupada pelo termo. Assim, uma sequência pode ser representada por:

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_n, \ldots)$$

Exemplo:

Na sequência (2, 5, 8, 11, 14, 17, ...)
$a_1 = 2; a_2 = 5; a_3 = 8; a_4 = 11; \ldots$

De acordo com o número de elementos, as sequências podem ser **finitas** ou **infinitas**.

Exemplos:

- (2, 7, 12, 17, 22), sequência de 5 termos, portanto finita.
- (1, 3, 9, 27, ...), sequência de infinitos termos, portanto infinita.

Termo geral de uma sequência

Algumas sequências podem ser representadas através de uma **lei de formação** (fórmula matemática). Isso significa que podemos obter um termo qualquer de uma sequência a partir de uma expressão que relaciona o valor do termo com sua posição. Essa expressão é denominada **termo geral da sequência**.

Exercício resolvido

01. Seja a sequência definida pelo termo geral $a_n = 3n + 2$, $n \in N^*$, escreva os quatro primeiros termos dessa sequência:

Resolução:

Primeiramente $N^* = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$, pois o (*) significa exclusão do zero do conjunto.
Substituindo **n** sucessivamente por 1, 2, 3, 4, vamos encontrar:

$n = 1 \rightarrow a_1 = 3 . 1 + 2 = 5$
$n = 2 \rightarrow a_2 = 3 . 2 + 2 = 8$
$n = 3 \rightarrow a_3 = 3 . 3 + 2 = 11$
$n = 4 \rightarrow a_4 = 3 . 4 + 2 = 14$

Logo, a sequência obtida é (5, 8, 11, 14).

Exercícios

01. Determine a sequência cujo termo geral é dado por $a_n = 5n - 3$, $n \in N^*$:

02. Encontre os cinco primeiros termos da sequência definida por $a_n = n^2 + 2n$, $n \in N^*$:

03. Seja a sequência definida por $a_n = (-1)^n \cdot n^2$, $n \in N^*$, determine o valor de $a_4 - a_2$.

Progressões aritméticas

São denominadas de progressões aritméticas (P. A.) toda sequência em que a diferença entre dois termos consecutivos, a partir do segundo, é igual a uma constante chamada **razão** (**r**).

Portanto, na P. A. $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{n-1}, a_n)$

$r = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \ldots = a_n - a_{n-1}$

Exemplos:

- A sequência (1, 3, 5, 7, 9) é uma P. A. de razão 2.
  $r = 3 - 1 = 5 - 3 = 7 - 5 = 9 - 7 = 2$
- (27, 23, 19, 15, ...) é uma P. A. de razão –4.
- (2, 2, 2, 2, ...) é uma P. A. de razão 0.
- $\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{4}, 2, \frac{9}{4}\right)$ é uma P. A. de razão $\frac{1}{4}$

Classificação de uma P. A.

Uma progressão aritmética pode ser representada por:

- **Crescente → r > 0**

Exemplo:

(5, 8, 11, 14, ...) → r = 3

- **Decrescente → r < 0**

Exemplo:

(35, 30, 25, 20, ...) → r = –5

- **Constante → r = 0**

Exemplo:

(5, 5, 5, 5, ...) → r = 0

Termo geral de uma P. A.

Seja uma P. A. $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{n-1}, a_n)$, em que a_1 é o primeiro termo, an o último termo (termo geral), **n** o número de termos e de razão **r**, podemos estabelecer a seguinte sequência:

$a_1 = a_1 + 0.r$ $\quad$ $a_2 = a_1 + 1.r$

$a_3 = a_1 + 2.r$ $\quad$ $a_4 = a_1 + 3.r$

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

Portanto, o termo geral da P. A. é expresso pela fórmula:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

Exercícios

04. Determinar o décimo quinto termo da P. A. (1, 4, 7, 10, ...):

05. Dada a P. A. (5, 3, 1, ...), determinar o valor do vigésimo termo dessa P. A.

06. Quantos termos tem uma P. A. finita em que o último termo é 33, o primeiro é –3 e a razão é 4?

07. Determine o primeiro termo da P. A. em que $a_{14} = 44$ e a razão é 3.

08. Determinar o número de múltiplos de 9 existentes entre 100 e 1 000.

09. Encontrar o termo geral da P. A., em que $a_1 = 3$ e a razão –2.

10. Em uma progressão aritmética em que $a_4 = 18$ e $a_{12} = 50$, determine o valor da razão dessa P. A.

11. Em uma P. A. a soma do terceiro com o sétimo termo é 20 e a soma do décimo termo com o décimo quinto é 50. Qual é a razão desta P. A.?

Interpolação aritmética

Interpolar, inserir ou intercalar **k** meios aritméticos entre **dois termos**, significa formar uma P. A. de **n** termos, em que as extremidades da P. A. **são dois termos** dados. Para isso, basta calcular a razão pela fórmula do termo geral.

$$a_n = a_1 + (n - 1) . r$$

$$n = k + 2$$

Exercícios

12. Insira cinco meios aritméticos entre 4 e 16.
(4, __, __, __, __, __, 16)

13. Interpole oito meios aritméticos entre 26 e –1.

Testes

01. O termo geral de uma sequência finita é dado por $a_n = 2n - 1$. Então o terceiro termo dessa sequência é:
a) 2
b) 3
c) 4
d) 5
e) 6

02. Determinar o sétimo termo da sequência definida por $a_n = \dfrac{3n + 7}{7}$:
a) 2
b) 3
c) 4
d) 5
e) 6

03. (FATES) Considere as sequências de números:
I. 3, 7, 11, ...
II. 2, 6, 18, ...
III. 2, 5, 10, 17, ...

O número que continua cada uma das sequências na ordem dada deve ser, respectivamente:
a) 15, 36 e 24
b) 15, 54 e 24
c) 15, 54 e 26
d) 17, 54 e 26
e) 17, 72 e 26

04. (ITAJUBÁ) Dada a progressão (5, 8, 11, ...), determine o 21.º termo:
a) 65
b) 35
c) 30
d) 60
e) 64

05. O termo geral da P. A. (3, 15, ...) é igual a:
a) $a_n = 9 - 12n$
b) $a_n = 9n - 12$
c) $a_n = 12 + 9n$
d) $a_n = 12n - 9$
e) $a_n = (12 + 9)n$

06. (PUC) O 150.º termo ímpar positivo é:
a) 151
b) 291

c) 301
d) 299
e) n.d.a.

07. Interpolando-se 10 meios aritméticos entre –28 e 60, obtemos uma P.A. onde a razão é:
a) 5
b) 6
c) 7
d) 8
e) 9

08. (UEL-PR) Interpolando-se 7 termos aritméticos entre os números 10 e 98, obtém-se uma P. A., cujo termo central é:
a) 45
b) 52
c) 54
d) 55
e) 57

09. (UFSC) Em uma P. A., o primeiro termo é 2 e o décimo termo é 5. Qual o quinto termo dessa progressão?
a) $\frac{10}{3}$
b) $\frac{7}{2}$
c) $\frac{11}{4}$
d) 4
e) n.d.a.

10. Quantos múltiplos de 3 existem entre 4 e 100?
a) 30
b) 32
c) 40
d) 50
e) 28

11. (PUC-SP) O número de múltiplos de 7 entre 1 000 e 10 000 é:
a) 1 280
b) 1 284
c) 1 282
d) 1 286
e) 1 288

12. (UEPG-PR) Na progressão aritmética em que $a_3 = 10$ e $a_6 = 7$ a razão vale:
a) –1
b) –2
c) 1
d) –1/2
e) n.d.a.

13. (UFPA/Adaptada) Numa P. A., temos $a_7 = 5$ e $a_{15} = 61$. Então a razão é:
a) 6
b) 7
c) 8
d) 9
e) 10

14. Em uma P. A. a soma do 2.º com o 5.º termo é 4 e a soma do 10.º com o 13.º termo é 36. Qual é a razão desta P. A.?
a) –2
b) –1
c) 0
d) 1
e) 2

15. Em uma P. A. a soma do 2.º com o 4.º termo é 12 e a soma do 9.º com o 12.º termo é 57. Qual é a razão desta P. A.?
a) 3
b) 2
c) 1
d) 0
e) –1

Propriedades

1.ª propriedade

Numa progressão aritmética de razão r:
$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{n-1}, a_n)$

Qualquer termo a partir do segundo é a média aritmética entre o termo anterior e o termo posterior.

Ou seja:

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}$$

Utilizando a razão da P. A. tem-se:

$$x - r, x, x + r$$

Exemplo:
Na P. A. (2, **4**, 6, 8, **10**, 12, 14)

Podemos verificar que:

$$4 = \frac{2+6}{2} \text{ ou } 10 = \frac{8+12}{2}$$

Exercícios

14. Determinar o valor de **x**, de tal modo que os números (3, **x**, 7) estejam nessa ordem em progressão aritmética.

15. (FGV-SP) A sequência (3 m, m + 1, 5) é uma progressão aritmética. Sua razão é:

Termos equidistantes dos extremos

Seja a P. A. (a_1, ..., a_k, ..., a_t, ..., a_n), os termos a_k e a_t são chamados de termos equidistantes dos extremos se o número de termos, que precede um deles, for igual ao número de termos que sucede o outro. Assim:

$$k - 1 = n - t \rightarrow k + t = 1 + n$$

2.ª propriedade

Em uma progressão aritmética, a soma dos termos equidistantes dos extremos é igual a soma dos extremos.

Nessas condições temos:

$$a_k + a_t = a_1 + a_n$$

Exemplo:
Na P. A. (2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16)
$a_1 + a_8 = a_2 + a_7 = a_3 + a_6 = a_4 + a_5$

Observe que a soma dos índices tem valores iguais.
Ou seja:
2 + 16 = 4 + 14 = 6 + 12 = 8 + 10

3.ª propriedade

Em uma P. A., de número ímpar de termos, o termo médio é a média aritmética entre os termos extremos.

Assim:

$$TM = \frac{a_1 + a_n}{2}$$

Exemplo:
Na P. A. (3, 7, 11, 15, 19, 23, 27)
Então:

$$15 = \frac{3+27}{2}$$

Exercícios

16. (PUCPR) Numa progressão aritmética, com número ímpar de termos, se os extremos são –2 e 20, o termo médio vale:

17. Numa progressão aritmética $a_5 + a_9 = 52$, nessas condições o valor de $a_2 + a_{12}$ é igual a:

Testes

16. (UFPA) Sabendo que a sequência (1 – 3x, x – 2, 2x + 1) é uma P. A., determine o valor de x.

a) –2
b) 0
c) 2
d) 4
e) 6

17. (UFPR) Calcule o valor não nulo de x para que os números $x^2 + 10$, $9x$, $x - 10$, nesta ordem, sejam termos consecutivos de uma progressão aritmética.

18. (UFPE) Sabendo que $(x + 1)$, $(3x - 2)$ e $(2x + 4)$ formam, nesta ordem, uma progressão aritmética, o valor de x e a razão desta P. A. são, respectivamente:

a) 1 e –2
b) 3 e 3
c) –3 e 2
d) 1 e –3
e) 2 e 3

19. Em uma progressão aritmética com 21 termos, a soma do 5.° com o 17.° termo é 54. A partir dessa informação, determine a soma do 9.° com o 13.° termo dessa P. A.

a) 45
b) 54
c) 108
d) 224
e) n.d.a.

20. Numa progressão aritmética com 10 termos, $a_1 + a_{10} = 20$, determine a soma do terceiro com o oitavo termo dessa P. A.

a) 20
b) 30
c) 40
d) 50
e) 60

21. Determine o 17.° termo de uma P. A., sabendo que a soma do 6.° com o 28.° termo é igual a 130.

a) 130
b) 110
c) 75
d) 65
e) 55

22. Em uma P. A. de 9 termos, o primeiro termo vale –4 e a razão é 2. Qual é o termo médio?

a) –4
b) –2
c) 0
d) 2
e) 4

Soma dos termos de uma P. A.

Considere a progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{n-1}, a_n)$ de **n** termos e razão **r**.

A soma dos **n** primeiros termos da P. A. é dada pela expressão:

$$S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right) . n$$

Importante saber

Se o número de termos (**n**) da progressão aritmética for ímpar, o termo médio é dado por $T.M. = \frac{a_1 + a_n}{2}$, logo a soma dos termos de uma P. A. poderá ser escrita pela expressão $S_n = (TM) . n$ (consequência da fórmula da soma dos termos de uma P. A.).

Exercícios

18. Calcule a soma dos termos da P. A. (1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19).

19. Obter a soma dos vinte primeiros números pares positivos.

20. Determinar a soma dos 50 primeiros termos da P. A. (–4, –1, 2, 5, ...).

21. Numa P. A. finita de 21 termos, o 11.° termo é igual a 38. Determine a soma dos termos dessa P. A.

22. (PUC-RS) Um teatro tem 18 poltronas na primeira fila, 24 na segunda, 30 na terceira e assim na mesma sequência, até a vigésima fila, sendo ela a última. O número de poltronas desse teatro é:

a) 92
b) 132
c) 150
d) 1 320
e) 1 500

Importante saber

O quadrado da soma dos números naturais

$(1 + 2 + 3 + 4)^2 =$
$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 1 + 8 + 27 + 64 = 100$

O quadrado da soma de uma série de números naturais começando por 1 é igual a soma do cubo de suas parcelas.

Disponível em: <http://www.suporteeducacional.com.br/matematica/?pg=curiosidades&idc=9> Acesso em: 11 maio 2010.

Testes

23. (PUCPR) A soma de todos os primeiros quarenta números naturais, estritamente positivos (excluindo o zero), é igual a:

a) 400
b) 410
c) 700
d) 670
e) 820

24. Encontre a soma dos 10 primeiros termos da P. A. (2, 4, 6, 8...):

a) 110
b) 220
c) 330
d) 440
e) 550

25. Encontre a soma dos 20 primeiros números ímpares positivos:

a) 100
b) 200
c) 300
d) 400
e) 500

26. Numa P. A., a soma dos 5 primeiros termos é igual a 20, então o terceiro termo é:

a) 4
b) 2
c) 5
d) 10
e) 20

27. (UFAL) O termo geral de uma sequência é $a_n = 4n - 7$, $\forall\ n \in N - \{0\}$. A soma dos vinte primeiros termos dessa sequência é:

a) 720
b) 700
c) 670
d) 640
e) 580

28. (Mackenzie-SP) Numa progressão aritmética de 100 termos, $a_3 = 10$ e $a_{98} = 90$. A soma de todos os termos é:

a) 10 000
b) 9 000
c) 4 500
d) 5 000
e) 7 500

29. (UFSC) Qual a soma dos dez primeiros termos de uma P. A., cujo termo geral tem por expressão $a_k = 3k - 16$?

30. (FGV-SP) A soma dos termos de uma progressão aritmética, cujo primeiro termo é 4, o último termo é 46 e a razão é igual ao número de termos, é:

a) 50
b) 100
c) 175
d) 150
e) n.d.a.

31. (UEL-PR) O 1.º termo de uma P. A. é –10 e a soma dos 8 primeiros termos é 60. A razão é:

a) 5
b) 6
c) 7
d) 8
e) 9

32. (UFRGS) A soma dos múltiplos de 11 compreendidos entre 1 e 1 000 é:

a) 45 000

b) 45 045
c) 30 000
d) 31 000
e) n.d.a.

33. (UNESP) Numa cerimônia de formatura de uma faculdade, os formandos foram dispostos em 20 filas, de modo a formar um triângulo, com 1 formando na primeira fila, 3 formandos na segunda, 5 na terceira e assim por diante, constituindo uma progressão aritmética. O número de formandos na cerimônia é:
a) 400
b) 410
c) 420
d) 800
e) 840

34. (UTFPR) Deseja-se construir uma parede decorativa com tijolos de vidro, da seguinte forma: a primeira fileira (base) deverá ter 100 tijolos, a segunda fileira 99 tijolos, a terceira 98 tijolos, e assim por diante até a última fileira que deverá ter apenas 1 tijolo. O número total de tijolos necessários para construir esta parede será igual a:
a) 5 000
b) 5 005
c) 4 950
d) 5 050
e) 5 001

Progressões geométricas

Chama-se progressão geométrica (P. G.) a toda sequência de termos não nulos em que o quociente, entre dois termos consecutivos, a partir do segundo, é igual a uma constante chamada **razão (q)**.

Portanto, na P. G. $(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{n-1}, a_n)$

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} \dots = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

Exemplos:

- A sequência (2, 4, 8, 16, 32) é uma P. G. de razão $\mathbf{q} = 2$.

$$q = \frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \frac{16}{8} = \frac{32}{16} = 2$$

- (–1, –3, –9, –27, ...) é uma P. G. de razão $\mathbf{q} = 3$.
- (2, 2, 2, 2, 2, ...) é uma P. G. de razão $\mathbf{q} = 1$.
- (8, –4, 2, –1, ...) é uma P. G. de razão $\mathbf{q} = -\frac{1}{2}$.

Classificação de uma P. G.

Crescente

Uma P. G. é considerada crescente se cada termo for maior que o anterior.

Exemplos:

(2, 4, 8, 16, ...) → $\mathbf{q} = 2$
(–18, –6, –2, ...) → $\mathbf{q} = 1/3$

Decrescente

Uma P. G. é considerada decrescente se cada termo for menor que o anterior.

Exemplos:

(–4, –8, –16, –32, ...) → $\mathbf{q} = 2$
(4, 2, 1, 1/2, 1/4, ...) → $\mathbf{q} = 1/2$

Na P. G. crescente e decrescente $\mathbf{q} > \mathbf{0}$, ou seja, a razão é positiva.

Constante

Uma P. G. é considerada constante se cada termo for igual ao anterior. Condição $\mathbf{q = 1}$.

Exemplo:

(3, 3, 3, 3, ...) → $\mathbf{q = 1}$

Alternante (ou oscilante)

Uma P. G. é considerada alternante se cada termo, a partir do segundo, tiver sinal contrário ao termo anterior. Condição $\mathbf{q < 0}$.

Exemplo:

(5, –10, 20, –40, ...) → $\mathbf{q} = -2$

Termo geral da P. G.

Seja uma P. G. $(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{n-1}, a_n)$ de **n** termos, $\mathbf{a_1}$ o primeiro termo, $\mathbf{a_n}$ o último termo e de razão **q**, podemos estabelecer a seguinte sequência:

$a_1 = a_1 \cdot q^0$ $\qquad$ $a_2 = a_1 \cdot q^1$

$a_3 = a_1 \cdot q^2$ $\qquad$ $a_4 = a_1 \cdot q^3$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Portanto, o termo geral da P. G. é dado por:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Exercícios

23. Determinar o sétimo termo da P. G. (1, 3, 9, ...).

24. Determinar o primeiro termo de uma progressão geométrica, sendo o sexto termo igual a 96 e a razão igual a 2.

25. Qual é a razão de uma progressão geométrica, em que $a_1 = 5$ e o quarto termo vale 135?

26. Calcule o número de termos da P. G. (–1, –2, –4, ..., –512).

27. (PUC-SP) O terceiro termo de uma sequência geométrica é 10 e o sexto termo é 80. Então, a razão e o primeiro termo são:

Interpolação geométrica

Interpolar, inserir ou intercalar **k** meios geométricos entre dois termos, significa formar uma P. G. de **n** termos, em que as extremidades da P. G. são dois termos dados. Para isso, basta calcular a razão pela fórmula do termo geral:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Exercícios

28. Inserir 4 meios geométricos entre 2 e 486.

29. Interpolando-se seis meios geométricos entre 256 e 2, obtemos uma P. G. decrescente, cujo quarto termo é:

Curiosidades

Você sabe o que é um número capicua?

Um número é **capicua**, quando lido da esquerda para a direita ou da direita para a esquerda, representa sempre o mesmo valor, como por exemplo 77, 434, 6446, 82328. Para obter um número capicua a partir de outro, inverte-se a ordem dos algarismos e soma-se com o número dado, um número de vezes até que se encontre um número capicua, como por exemplo:

Partindo do número 84:

84 + 48 = 132; 132 + 231 = 363, que é um número capicua.

Disponível em: < http://www.somatematica.com.br/dicionarioMatematico/n.php> Acesso em: 11 maio 2010.

Testes

35. Qual é o 7.º termo da P. G. (1, –2, ...)?

a) 16
b) 32
c) 64
d) –32
e) –64

36. (OSEC-SP) O número de termos da P. G. $\left(\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, \ldots, 729\right)$ é:

a) 4
b) 8
c) 9
d) 10
e) 11

37. Determine o primeiro termo de uma P. G., sabendo que o décimo termo é 1 536 e a razão é igual a 2.

a) 2
b) 3
c) 4
d) 5
e) 6

38. Na P. G. $\left(2, 2\sqrt{2}, 4, \ldots\right)$, a_{11} é igual a:

a) 24
b) 128
c) 32
d) 64
e) 16

39. (UFRGS) O décimo termo da progressão geométrica, cujos três primeiros termos são (–8, –4, –2, ...) é:

a) $-\dfrac{1}{64}$
b) $\dfrac{1}{64}$
c) $-\dfrac{1}{32}$
d) $-\dfrac{1}{128}$
e) $\dfrac{1}{32}$

40. Qual o primeiro termo da P. G. crescente em que $a_3 = 24$ e $a_7 = 384$?

a) 2
b) 4
c) 5
d) 6
e) 7

41. (Bandeirantes-SP) O valor do 22.º termo de uma P. G. que tem $a_1 = q = \sqrt{2}$ é:

a) $512\sqrt{2}$
b) 1 024
c) $1\,024\sqrt{2}$
d) 2 048
e) $2\,048\sqrt{2}$

42. (Mackenzie-SP) O sexto termo de uma P. G. na qual dois meios geométricos estão inseridos entre 3 e –24, tomados nessa ordem, e sendo B o primeiro termo da P. G. é:

a) –48
b) –96
c) 48
d) 96
e) 192

43. (Mackenzie-SP) Seja x o trigésimo termo da P. G. (2, 4, 8, ...). O valor de $\log_4 x$ é:

a) 15
b) 20
c) 25
d) 30
e) 35

44. (UFSC) Inserindo-se 4 números entre x e 192, obtém-se uma P. G. de razão 2. Qual o valor de x?

a) 10
b) 9
c) 8
d) 7
e) 6

45. (UFPR) Inserindo-se 2 meios geométricos entre 686 e 2, obtém-se uma P. G. cujo 3.º termo é:

46. (FGV-SP) A média aritmética dos seis meios geométricos que podem ser inseridos entre 4 e 512 é:

a) 48
b) 84
c) 128
d) 64
e) 96

Propriedades da P. G.

1.ª propriedade

Seja a P. G. $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n)$

Qualquer termo a partir do segundo é a média geométrica entre o termo anterior e o termo posterior.

$$(a_k)^2 = a_{k-1} \cdot a_{k+1} \leftrightarrow a_k = \sqrt{a_{k-1} \cdot a_{k+1}}$$

Usando a razão da P.G.

$$\frac{x}{q}, x, x \cdot q$$

Exemplo:

Na P. G. (3, **6**, 12, 24, 48) $\rightarrow 6^2 = 3 \cdot 12$

Exercícios

30. O terceiro e o quinto termos de uma P. G. de razão positiva valem 4 e 16, respectivamente. Determine o valor do quarto termo dessa P. G.

31. Qual deve ser a razão de modo que os termos $x - 2$, x, $x + 4$ formem, nessa ordem, uma progressão geométrica.

2.ª propriedade

Seja a P. G. $(a_1, ..., a_k, ..., a_t, ..., a_n)$

Em uma progressão geométrica, o produto dos termos equidistantes dos extremos é igual ao produto dos extremos.

$$a_k \cdot a_t = a_1 \cdot a_n$$

Exemplo:

Seja a P. G. (1, 2, **4**, 8, 16, **32**, 64, 128)

$4 \cdot 32 = 1 \cdot 128$

3.ª propriedade

Em consequência das duas primeiras propriedades:

Em uma P. G., de número ímpar de termos, o termo médio é a média geométrica entre os termos extremos.

$$TM^2 = a_1 \cdot a_n \leftrightarrow TM = \sqrt{a_1 \cdot a_n}$$

Exemplo:

Seja a P. G. (1, 2, 4, **8**, 16, 32, 64) $\rightarrow n = 5$

$8^2 = 1 \cdot 64$

Exercício

32. Em uma P. G., o 2.º termo é 6 e o 6.º termo é 96. Determine o 4.º termo.

Testes

47. (PUC-SP) Se a sequência $(4x, 2x + 1, x - 1)$ é uma P. G., então o valor de **x** é:

a) –1/8
b) –8
c) –1
d) 8
e) 1/8

48. (UFPR) Somando um mesmo número aos números 5, 7 e 6, nesta ordem, obtém-se uma P. G. O número somado é:

a) 16/3
b) –19/3
c) 17/3
d) –11/3
e) 11/3

49. (Cesgranrio-RJ) Se **x** e **y** são positivos e se **x**, **xy**, **3x** estão, nesta ordem, em P. G., então o valor de **y** é:

a) $\sqrt{2}$
b) 2
c) $\sqrt{3}$
d) 3
e) 9

50. (UFSC) Em uma P. G., o 3.º termo é $\frac{16}{9}$ e o 7.º termo é 144. Determine o 5.º termo.

a) 16
b) 20
c) 24
d) 36
e) 72

51. (UEPG-PR) Numa P. G. decrescente de 7 termos, o produto entre os extremos é $\frac{1}{32}$. O quarto termo é igual a:

a) $\frac{1}{16}$
b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
c) $\frac{\sqrt{2}}{8}$
d) $4\sqrt{2}$
e) n.d.a.

52. (UCS-RS) Sabendo que a sucessão (x – 2, x + 2, 3x – 2, ...) é uma P. G. crescente, então o quarto termo é:

a) 27
b) 64
c) 32
d) 16
e) 54

53. O 15.º termo da progressão geométrica (x – 1, x, x + 2, ...) é:

a) 2^{13}
b) 2^{14}
c) 2^{15}
d) 2^{16}
e) 2^{17}

Soma dos termos de uma P. G. limitada

Considere a progressão geométrica (a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n) de **n** termos e razão **q (q ≠ 1)**.

As somas dos **n** primeiros termos da P. G. são dadas pela expressão:

$$S_n = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q - 1} \quad \text{ou} \quad S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

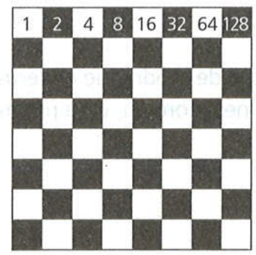
Exercícios

33. Determinar a soma dos 10 primeiros termos da P. G. (2, 4, 8, ...).

34. Achar a soma dos 8 primeiros termos da P. G. (1, 3, 9, ...).

35. Numa P. G., conhece-se $a_1 = 2$, $a_n = 256$ e $S_n = 510$. Determine o valor de q.

36. Quando o rei da Pérsia perguntou qual a recompensa que desejava, o inventor do jogo de xadrez pediu um grão de trigo para o primeiro quadrado do tabuleiro, dois para o segundo, quatro para o terceiro, oito para o quarto, e assim por diante, dobrando a quantidade para cada quadrado subsequente. O número total de grãos correspondente aos 64 quadrados é:



O celeiro que satisfaz essa condição é, por exemplo, aquele que tem 4 metros de altura, 10 metros de largura e 300 000 000 km de comprimento, ou seja, o dobro da distância que separa a Terra do Sol. A quantidade de grãos correspondente à expressão $2^{64} – 1$ (fórmula da soma), cobriria toda a superfície da Terra com uma camada de trigo de 2 cm de altura.

Soma dos infinitos termos de uma P. G.

Se o número de termos de uma P. G. tende para o infinito ($n \to \infty$), e a razão q é tal que ($-1 < q < 1$ e $q \neq 0$), os termos, a partir do segundo, possuem valores absolutos menores que o termo anterior, dizemos então que o último termo a_n tende a zero ($a_n \to 0$), nessas condições, a soma dos infinitos termos da P. G. é dada por:

$$S_n = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q - 1} \rightarrow S = \frac{0 \cdot q - a_1}{1 - q}$$

$$S = \frac{a_1}{1 - q}$$

Exemplo:

Determinar a soma dos infinitos termos da

$$\text{P. G.} \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\right)$$

Se considerarmos esta soma feita na forma decimal, teríamos:

(1 + 0,5 + 0,25 + 0,125 + 0,0625 + ...), a soma dos 5 termos é 1,9375 e quanto mais termos considerarmos, o

resultado tende (converge) a 2. Dizemos então que o **limite da soma** é 2.

Utilizando a fórmula, temos:

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Exercícios

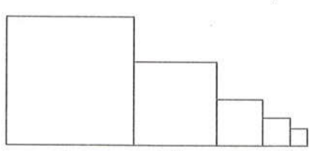
37. Calcule a soma dos termos da P. G. $\left(6, 3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \ldots\right)$.

38. Determine o valor para o qual converge a soma $10 + 5 + \frac{5}{2} + \ldots$

39. Determine o conjunto solução da equação

$$x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} + \ldots = 12$$

40. (UEL-PR) Na figura abaixo, o lado do quadrado maior mede 1 e os outros quadrados foram construídos de modo que a medida do respectivo lado seja a metade do lado do quadrado anterior.



Imaginando que a construção continue indefinidamente, a soma das áreas de todos os quadrados será:

Testes

54. Qual a soma dos cinco primeiros termos da P. G. (4, 12, 36, ...)?

a) 256
b) 484
c) 867
d) 128
e) 584

55. (UFPA) A soma da série infinita $1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \ldots$ é:

a) $\frac{6}{5}$
b) $\frac{7}{5}$
c) $\frac{5}{4}$
d) 2
e) $\frac{7}{4}$

56. (UFRJ) Numa P. G., o $a_1 = 3$ e $a_3 = 12$. A soma dos oito primeiros termos positivos é:

a) 765
b) 500
c) 702
d) 740
e) n.d.a.

57. (Cescea-SP) A soma dos termos de uma P. G. infinita é 3. Sabendo-se que o primeiro termo é igual a 2, então o quarto termo dessa P. G. é:

a) $\frac{2}{27}$
b) $\frac{1}{4}$
c) $\frac{2}{3}$
d) $\frac{1}{27}$
e) $\frac{3}{8}$

58. (UEL-PR) A soma dos termos da P. G. $\left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{9}, \ldots\right)$ é:

a) $\frac{2}{5}$
b) $\frac{9}{20}$
c) $\frac{1}{2}$
d) $\frac{11}{20}$
e) $\frac{3}{5}$

59. (UEPG-PR) Entre 5 e 20 são inseridos três meios geométricos. Sobre a P. G. resultante, assinale o que for correto.
a) O termo central da P. G. é um número irracional.
b) $a_2 \cdot a_4 = 100$.
c) A razão da P. G. é um número racional.
d) A soma dos termos da P. G. é um número inteiro.
e) $a_2 + a_4 = 15$.

60. O terceiro termo de uma P. G. é 20, e o sétimo é 320. A soma dos nove primeiros termos dessa P. G. é:
a) 8 329
b) 8 328
c) 2 555
d) 2 928
e) n.d.a.

61. (FESP-SP) A soma dos seis primeiros termos da P. G. $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \ldots\right)$ é:
a) $\frac{21}{33}$
b) $\frac{12}{33}$
c) $\frac{2}{3}$
d) $\frac{15}{32}$
e) $\frac{21}{32}$

62. (UFCE) A solução da equação
$x + \frac{x}{3} + \frac{x}{9} + \frac{x}{27} + \ldots = 60$ é:
a) 37
b) 40
c) 44
d) 50
e) 51

63. (UFSC) Determine o valor de x na equação
$\frac{2x}{3} + \frac{4x}{9} + \frac{8x}{27} + \frac{16x}{81} + \ldots = 12$
a) 2
b) 3
c) 9
d) 6
e) 5

64. (ACAFE-SC) Os raios de infinitos círculos formam a P. G. $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \ldots$
A soma das áreas desses círculos será:
a) 6π u.a.
b) 9π u.a.
c) 12π u.a.
d) 18π u.a.
e) 24π u.a.

Respostas

Exercício 01: (2, 7, 12, 17, ...)

Exercício 02: (3, 8, 15, 24, 35)

Exercício 03: 12

Exercício 04: $a_{15} = 43$

Exercício 05: $a_{20} = -33$

Exercício 06: n = 10 termos

Exercício 07: $a_1 = 5$

Exercício 08: n = 100 termos

Exercício 09: $a_n = -2n + 5$

Exercício 10: r = 4

Exercício 11: r = 2

Exercício 12: (4, 6, 8, 10, 12, 14, 16)

Exercício 13: (26, 23, 20, 17, 14, 11, 8, 5, 2, –1)

Exercício 14: x = 5

Exercício 15: r = 7

Exercício 16: TM = 9

Exercício 17: 52

Exercício 18: S = 100

Exercício 19: S = 420

Exercício 20: S = 3475

Exercício 21: S = 798

Exercício 22: e

Exercício 23: $a_7 = 729$

Exercício 24: $a_1 = 3$

Exercício 25: q = 3

Exercício 26: n = 10

Exercício 27: q = 2 e $a_1 = 5/2$

Exercício 28: (2, 6, 18, 54, 162, 486)

Exercício 29: $a_4 = 32$

Exercício 30: $a_4 = 8$

Exercício 31: q = 2

Exercício 32: $a_4 = 24$

Exercício 33: S = 2 046

Exercício 34: S = 3 280

Exercício 35: q = 2

Exercício 36: $2^{64} - 1$

Exercício 37: S = 12

Exercício 38: S = 20

Exercício 39: x = 6

Exercício 40: 4/3

Gabarito

01) D	02) C	03) C	04) A	05) D	06) D
07) D	08) C	09) A	10) B	11) D	12) A
13) B	14) E	15) A	16) C	17) 17	18) B
19) B	20) A	21) D	22) E	23) E	24) A
25) D	26) A	27) B	28) D	29) 5	30) C
31) A	32) B	33) A	34) D	35) C	36) C
37) B	38) D	39) A	40) C	41) D	42) B
43) A	44) E	45) 14	46) B	47) A	48) B
49) C	50) A	51) C	52) C	53) B	54) B
55) C	56) A	57) A	58) B	59) B	60) C
61) E	62) B	63) D	64) C		

Sumário

Avaliações

Anotações

Matemática

4 E

Geometria plana

Ilustração Mulher ensinando geometria (1309-1316), Paris, França

Para iniciarmos o estudo da Geometria Plana, necessitamos formar uma ideia do que seja **ponto**, **reta** e **plano**, e saber como representá-los.

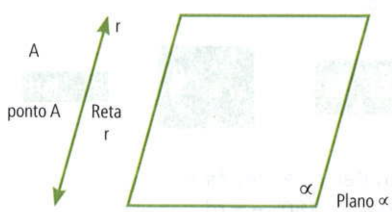
Ponto, **reta** e **plano** são conceitos primitivos aceitos intuitivamente, sem definição.

Representação

Os **pontos** são representados por letras maiúsculas do nosso alfabeto.

As **retas** são representadas por letras minúsculas do nosso alfabeto.

Os **planos** são representados por letras minúsculas do alfabeto grego.



A reta e o plano são ilimitados, eles não acabam, já as figuras são limitadas e estão contidas no plano.

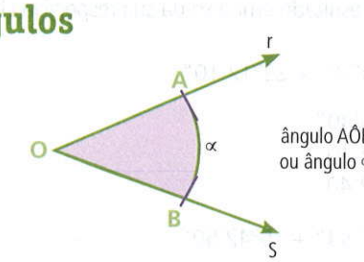
A reta é infinita, não tem um ponto inicial nem final, portanto, não é possível medi-la. Ela tem infinitos pontos e qualquer um desses pontos a divide em duas partes, denominadas **semirretas**.

Indica-se: $\overrightarrow{Ar}$

Dois pontos distintos e uma reta determinam um **segmento de reta** (o qual pode ser medido).

Indica-se: $\overline{AB}$

Ângulos



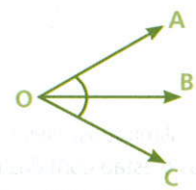
É a região do plano limitada por duas semirretas de mesma origem. O ponto **O** é o vértice e as semirretas **r** e **s** são os lados do ângulo.

Ângulos consecutivos

Dois ângulos são chamados consecutivos quando possuem mesmo vértice e um dos seus lados em comum.

Ângulos adjacentes

Dois ângulos são chamados adjacentes quando são consecutivos, mas não possuem intersecção entre seus pontos interiores.



AÔB e BÔC

Medidas angulares

Sistema graus (sexagesimal)

Baseia-se na divisão da circunferência em **360** partes, em que cada uma dessas partes é denominada **um grau** (1°).

- Uma circunferência se divide em 360 graus (360°).
- Um grau tem 60 minutos (60′).
- Um minuto tem 60 segundos (60″).

Operações com ângulos no sistema sexagesimal

Adição e subtração

Para adicionarmos ou subtrairmos ângulos, devemos efetuar separadamente graus, minutos e segundos, colocando cada resultado embaixo da sua respectiva classe.

Exemplos:

a) 14°40′30″ + 22°12′10″

$$\begin{array}{r} 14°40'30'' \\ +\ \underline{22°12'10''} \\ 36°52'40'' \end{array}$$

b) 13°47′53″ + 15°42′50″

$$\begin{array}{r} 13°47'53'' \\ +\ \underline{15°42'50''} \\ 28°89'103'' \end{array}$$

Nesse caso, vê-se que nos segundos e minutos ambos passaram de 60″ e 60′, respectivamente, por isso fazemos as transformações necessárias. Portanto:

28°89′103″ = 28°90′43″ = 29°30′43″

c) 39°52′48″ – 23°31′26″

$$\begin{array}{r} 39°52'48'' \\ -\ \underline{23°31'26''} \\ 16°21'22'' \end{array}$$

d) 51° – 32°42′35″

Nesse caso, devemos fazer os respectivos empréstimos de graus para minutos e de minutos para segundos. Com isso:

$$\begin{array}{r} 51° \\ -32°42'35'' \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 50°60' \\ -32°42'35'' \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 50°59'60'' \\ -\ \underline{32°42'35''} \\ 28°17'25'' \end{array}$$

Note que não podemos fazer o empréstimo direto de graus para segundos mesmo sabendo que 1° = 3 600″.

Exercício

01. Calcule as operações indicadas abaixo:

a) 120°30′45″ + 60°20′12″

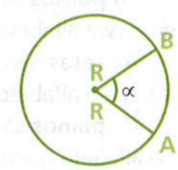
b) 18°38′40″ + 136°46′42″

c) 56°24′36″ – 44°16′34″

d) 120° – 47°32′54″

Sistema radiano (circular)

A unidade de medida denominada radiano é definida como sendo a medida do ângulo central que intercepta um arco de circunferência de comprimento igual ao raio da circunferência.



$\overset{\frown}{AB} = R$ $\alpha = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{R}$ $\alpha = 1\text{rd}$

A circunferência tem 2π rd

Importante: 180° = π rd

Importante saber

- Para transformar um ângulo de graus para radianos, podemos usar a seguinte regra:
1. Multiplique π ao ângulo dado.
2. Divida o resultado por 180°.

Exemplo:

$$60° = \frac{60°\,\pi}{180°} = \frac{\pi}{3}\,\text{rad}$$

- Para transformar um ângulo de radianos para graus, basta substituir π por 180°.

Exemplo:

$$\frac{5\pi}{3}\,\text{rad} = \frac{5.180°}{3} = \frac{900°}{3} = 300°$$

Exercício

02. Transforme:

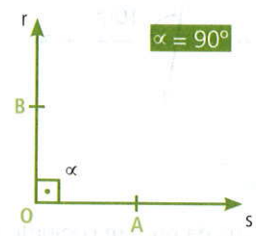
a) $\frac{3\pi}{5}$ em graus

b) 420° em rad

Tipos de ângulos

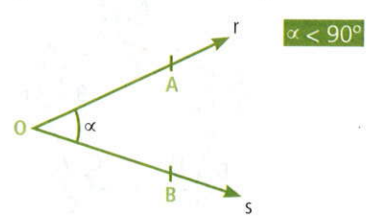
Ângulo reto

É o ângulo que tem medida igual a 90°.



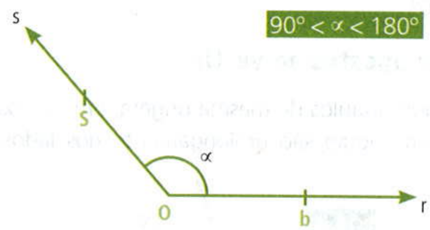
Ângulo agudo

É o ângulo que tem medida menor que 90°.



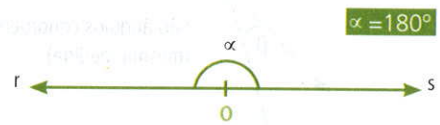
Ângulo obtuso

É o ângulo que tem medida maior que 90° e menor que 180°.



Ângulo raso

É o ângulo que tem medida igual a 180° e os lados são semirretas opostas.



Ângulo nulo

É o ângulo que tem medida igual a 0°.

Ângulos complementares

São dois ângulos, cuja soma de suas medidas é igual a 90°. Para representar dois ângulos complementares, usamos **x** e **90° – x**.

Ângulos suplementares

São dois ângulos, cuja soma de suas medidas é igual a 180°. Para representar dois ângulos suplementares, usamos **x** e **180° – x**.

Ângulos replementares

São dois ângulos, cuja soma de suas medidas é igual a 360°. Para representar dois ângulos replementares usamos **x** e **360° – x**.

Exercícios

03. Determine o complementar dos ângulos abaixo:

a) 50° ________

b) 45° ________

c) 60° ________

04. Determine o suplementar dos ângulos abaixo:

a) 120° ________

b) 150° ________

c) 160° ________

05. Determine o replementar dos ângulos abaixo:

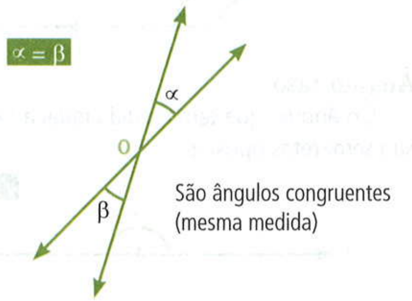
a) 200° ________

b) 250° ________

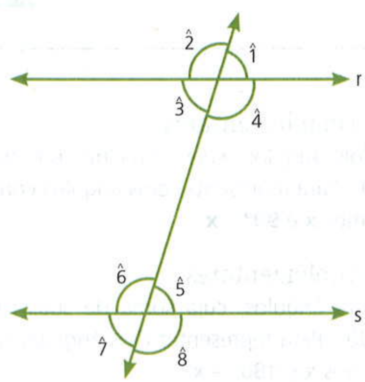
c) 300° ________

Ângulos opostos ao vértice

São dois ângulos de mesma origem, em que os lados de um ângulo são prolongamento dos lados do outro.



Ângulos formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal



- Os ângulos $\begin{cases} \hat{1} \text{ e } \hat{5}; \hat{2} \text{ e } \hat{6} \\ \hat{3} \text{ e } \hat{7}; \hat{4} \text{ e } \hat{8} \end{cases}$ são denominados **correspondentes** e possuem suas medidas iguais.

- Os ângulos $\{\hat{4} \text{ e } \hat{6}; \hat{3} \text{ e } \hat{5}$ são denominados **alternos internos** e possuem suas medidas iguais.

- Os ângulos $\{\hat{1} \text{ e } \hat{7}; \hat{2} \text{ e } \hat{8}$ são denominados **alternos externos** e, também, possuem suas medidas iguais.

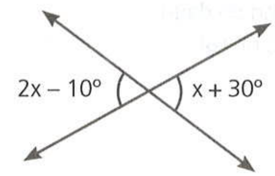
- Os ângulos $\{\hat{4} \text{ e } \hat{5}; \hat{3} \text{ e } \hat{6}$ são denominados **colaterais internos** e são suplementares, ou seja, a soma de suas medidas é igual a 180°.

- Os ângulos $\{\hat{1} \text{ e } \hat{8}; \hat{2} \text{ e } \hat{7}$ são denominados **colaterais externos** e também são suplementares.

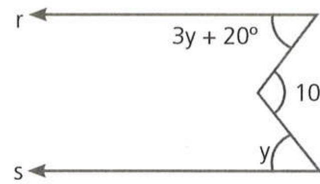
Exercício

06. Resolva:

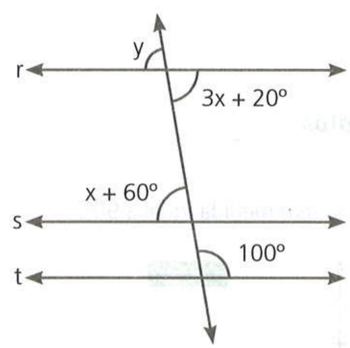
a) Determine o valor de **x** na figura abaixo:



b) Determine o valor de **y** na figura abaixo, sabendo que r//s:

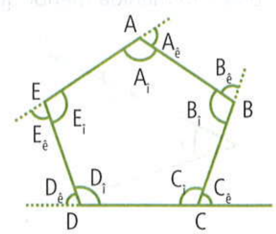


c) Determine o valor de **x + y** na figura abaixo, sabendo que r//s//t:



Polígonos

É a figura formada por um conjunto de segmentos consecutivos, onde a extremidade do último coincide com a origem do primeiro.

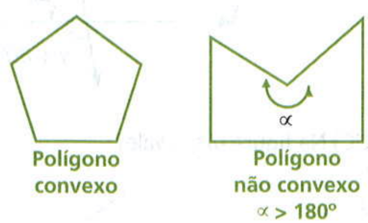


- **Vértices**
A; B; C; D; E
- **Lados**
a, b, c, d, e
- **Ângulos internos**
A_i, B_i, C_i, D_i, E_i
- **Ângulos externos**
$A_ê$, $B_ê$, $C_ê$, $D_ê$, $E_ê$

Classificação

Os polígonos podem ser classificados como sendo **convexos** e **não convexos** (côncavos).

Um polígono é denominado convexo quando todos os seus ângulos internos são menores que 180°, já um polígono é denominado côncavo quando pelo menos um de seus ângulos internos é maior que 180°.



Nos polígonos convexos os ângulos internos e externos em qualquer um de seus vértices são suplementares, ou seja, $a_i + a_ê = 180°$.

Polígono regular

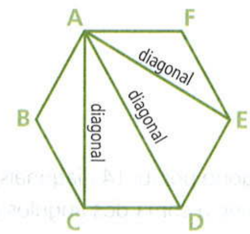
Chamamos de regular ao polígono que possui todos os lados com medidas iguais e os ângulos internos também iguais.

Nomenclatura

Quanto ao número de lados, os polígonos são classificados em:

3 lados: triângulo	9 lados: eneágono
4 lados: quadrilátero	10 lados: decágono
5 lados: pentágono	11 lados: undecágono
6 lados: hexágono	12 lados: dodecágono
7 lados: heptágono	15 lados: pentadecágono
8 lados: octógono	20 lados: icoságono

Diagonal de um polígono



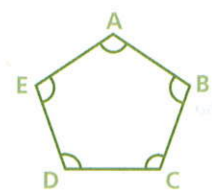
Diagonal de um polígono é o segmento de reta que une dois vértices não consecutivos.

Número de diagonais de um polígono

$$d = \frac{n(n-3)}{2}$$

d → número de diagonais
n → número de lados do polígono

Soma dos ângulos internos de um polígono



$$S_i = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} + \hat{E}$$

Sendo **n** o número de lados de um polígono, a soma dos seus ângulos internos será dada por:

$$S_i = (n-2) \cdot 180°$$

Importante saber

- A soma dos ângulos externos de um polígono é sempre igual a 360°. $S_e = 360°$
- Nos polígonos regulares, temos:

$$a_i = \frac{S_i}{n} \qquad a_ê = \frac{S_e}{n}$$

a_i = ângulo interno
$a_ê$ = ângulo externo

Exercícios

07. Determine a soma dos ângulos internos e o número de diagonais do hexágono:

08. Determine o valor do ângulo interno do pentágono regular:

09. Um polígono possui 14 diagonais, nestas condições determine a soma dos ângulos internos desse polígono:

10. O ângulo externo de um polígono regular é igual a 45°. Determine o número de lados desse polígono:

Testes

01. Assinale a alternativa falsa:

a) $300° = \frac{5\pi}{3}$ rad

b) $160° = \frac{8\pi}{9}$ rad

c) $\frac{3\pi}{2}$ rad $= 270°$

d) $400° = \frac{20\pi}{9}$ rad

e) $\frac{4\pi}{3}$ rad $= 120°$

02. Dois ângulos são complementares, um deles vale 54°, o outro vale:

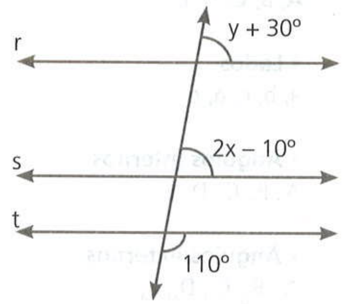
a) 26°
b) 36°
c) 46°
d) 126°
e) 306°

03. O suplemento de 58°25'40" é:

a) 121°34'20"
b) 122°34'20"
c) 121°44'20"
d) 122°44'20"
e) 121°44'40"

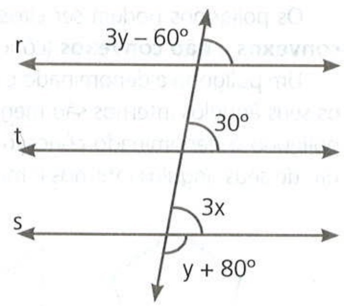
04. Determine o valor de x + y na figura, sendo r//s//t:

a) 120°
b) 130°
c) 140°
d) 150°
e) 160°



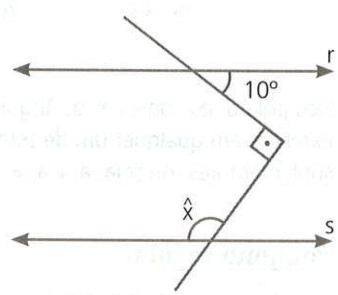
05. Sendo r//s//t, determine o valor de x + y na figura:

a) 10°
b) 60°
c) 70°
d) 80°
e) 150°



06. (PUC) Na figura r//s, $\hat{x}$ vale?

a) 90°
b) 100°
c) 110°
d) 120°
e) n.d.a.



07. Determine a soma dos ângulos internos e o número de diagonais do hexágono:

a) $S_i = 720°$ e $d = 9$
b) $S_i = 620°$ e $d = 9$
c) $S_i = 720°$ e $d = 10$
d) $S_i = 620°$ e $d = 10$

08. Encontre a soma dos ângulos internos e o número de diagonais do pentadecágono:

a) 2 430° e 100
b) 2 430° e 90
c) 2 340° e 100
d) 2 340° e 90
e) 2 340° e 80

09. (UFRGS) O polígono cujo número de diagonais é igual ao triplo do número de lados é o:

a) Pentágono.
b) Eneágono.
c) Hexágono.
d) Heptágono.
e) Octógono.

10. Cada um dos ângulos internos de um polígono regular mede 108°. Qual é o número de lados do polígono?

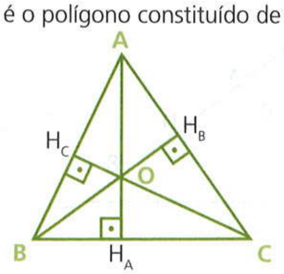
a) 3
b) 4
c) 5
d) 6
e) 7

11. Cada um dos ângulos externos de um polígono regular mede 45°. Quantas diagonais tem esse polígono?

a) 20
b) 27
c) 35
d) 44
e) 54

Triângulos

Triângulo é o polígono constituído de três lados.



Elementos

- **Vértices**

A, B e C

- **Lados**

$\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$

- **Ângulos**

$\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$

- **Altura**

É o segmento de reta que une um vértice, perpendicularmente, ao lado oposto.

$\overline{AH_A}$, $\overline{BH_B}$ e $\overline{CH_C}$

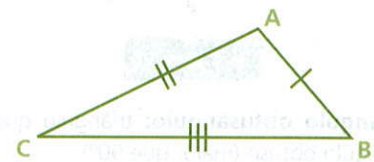
A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°.

Classificação

Quanto aos lados

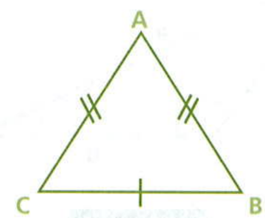
- **Triângulo escaleno**

Possui os três lados diferentes.



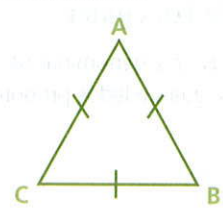
- **Triângulo isósceles**

Possui dois lados iguais.



- **Triângulo equilátero**

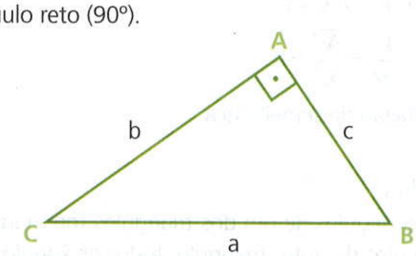
Possui os três lados iguais.



Todo triângulo equilátero é também isósceles.

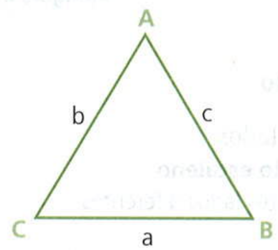
Quanto aos ângulos

- **Triângulo retângulo:** triângulo que possui um ângulo reto (90°).



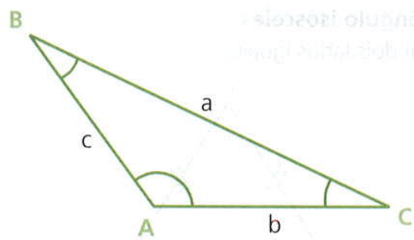
$a^2 = b^2 + c^2$

- **Triângulo acutângulo:** triângulo que possui três ângulos agudos (menores que 90º).



$a^2 < b^2 + c^2$

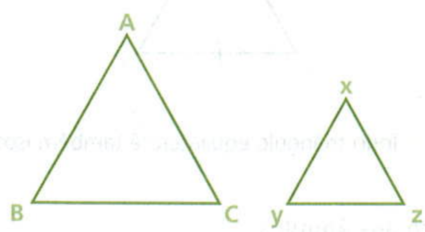
- **Triângulo obtusângulo:** triângulo que possui um ângulo obtuso (maior que 90º).



$a^2 > b^2 + c^2$

Semelhança de triângulos

Dois triângulos são denominados semelhantes se possuem ângulos iguais e lados proporcionais, ou seja:



$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{x} \quad \hat{B} = \hat{y} \quad \hat{C} = \hat{z} \\ \dfrac{\overline{AB}}{\overline{xy}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{yz}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{xz}} = K \\ K = \text{Razão de semelhança} \end{cases}$$

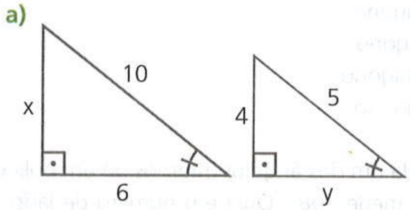
Propriedade

Se dois ângulos de um dos triângulos forem iguais a dois ângulos de outro triângulo, todos os ângulos de ambos serão iguais. Isso ocorre pelo fato da soma dos seus ângulos internos ser igual a 180º.

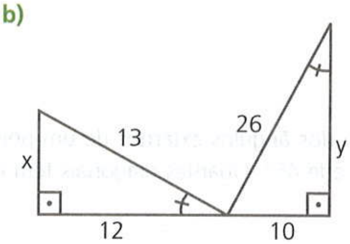
Exercícios

11. Encontre os valores de **x** e **y** nos triângulos abaixo:

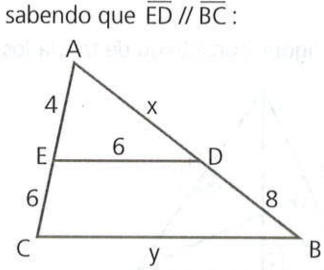
a)



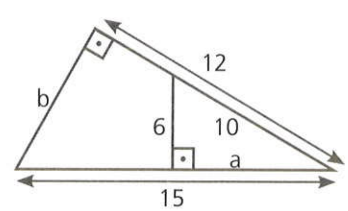
b)



12. Determine os valores de **x** e **y** na figura abaixo, sabendo que $\overline{ED} \parallel \overline{BC}$:



13. Encontre os valores de **a** e **b** na figura abaixo:

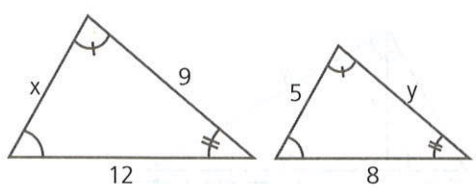


14. Em um dia ensolarado, a sombra de uma pessoa com 1,8 m de altura é de 2,7 m. Ao seu lado a sombra de uma árvore mede 4,8 m. Qual é a altura da árvore?

15. Determine a profundidade de um poço que tem 2 m de abertura, sabendo que a 0,5 m da borda, uma pessoa de 1,5 m pode traçar uma linha visual unindo a borda do poço com a sua linha de fundo.

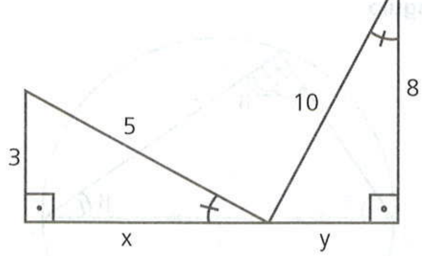
Testes

12. Encontre o valor de **x** e **y** nos triângulos abaixo:



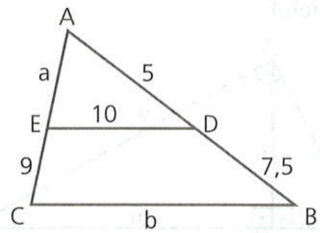
a) x = 7,5 e y = 6
b) x = 6 e y = 7,5
c) x = 15 e y = 6
d) x = 6 e y = 15

13. Determine os valores de **x** e **y** nos triângulos abaixo:



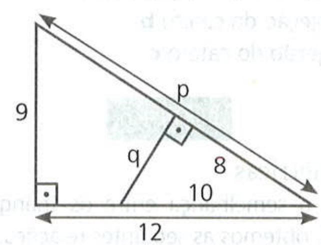
a) x = 6 e y = 4
b) x = 4 e y = 6
c) x = 4 e y = 5
d) x = 5 e y = 4

14. Encontre os valores de **a** e **b** no triângulo, sabendo que $\overline{BC} \parallel \overline{DE}$:



a) a = 6 e b = 12
b) a = 5 e b = 25
c) a = 6 e b = 25
d) a = 5 e b = 12

15. Determine os valores de **p** e **q** no triângulo abaixo:



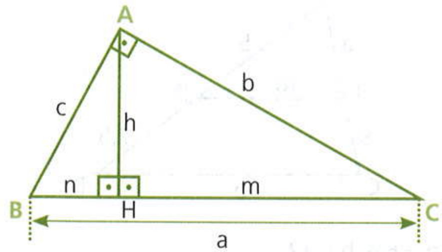
a) p = 15 e q = 5
b) p = 15 e q = 6
c) p = 12 e q = 6
d) p = 12 e q = 5

16. Em um dia ensolarado dois namorados caminham lado a lado com suas sombras medindo 2,70 m e 2,55 m. Se a altura do rapaz era 1,80 m, qual era a altura da menina?
a) 1,50 m
b) 1,80 m
c) 1,60 m
d) 1,70 m

17. (UNICAMP-SP) Uma rampa de inclinação, como a que dá acesso ao Palácio do Planalto, em Brasília, tem 4 m de altura em sua parte mais alta. Uma pessoa tendo começado a subi-la, nota que, após caminhar 12,3 m, sobre a rampa, está a 1,5 m de altura em relação ao solo. Calcule quantos metros a pessoa ainda deve andar para atingir o ponto mais alto da rampa.
a) 10 m
b) 13 m
c) 20,5 m
d) 23 m

Relações métricas no triângulo retângulo

É o triângulo que possui um ângulo interno igual a 90° (ângulo reto).



Elementos

a → hipotenusa
b → cateto
c → cateto
h → altura relativa à hipotenusa
m → projeção do cateto **b**
n → projeção do cateto **c**

$$a = m + n$$

Relações métricas

Fazendo a semelhança entre os triângulos **ABC**, **AHB** e **AHC**, obtemos as seguintes relações:

$b^2 = a \cdot m$
$c^2 = a \cdot n$
$h^2 = m \cdot n$
$a \cdot h = b \cdot c$

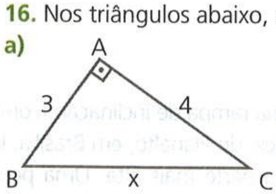
Teorema de Pitágoras

$$a^2 = b^2 + c^2$$

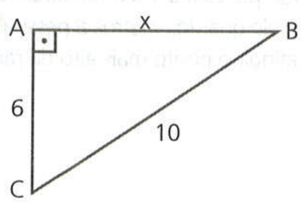
Exercícios

16. Nos triângulos abaixo, determine o valor de **x**:

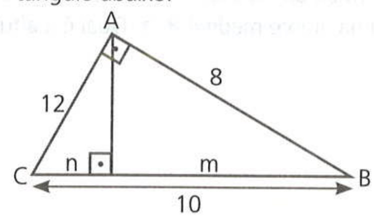
a)



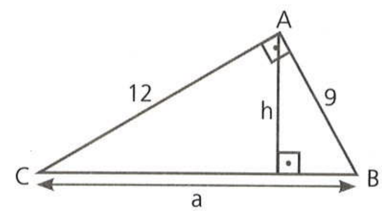
b)



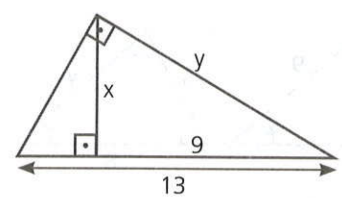
17. Determine os valores de **m** e **n** no triângulo retângulo abaixo:



18. Encontre o valor da altura do triângulo retângulo:

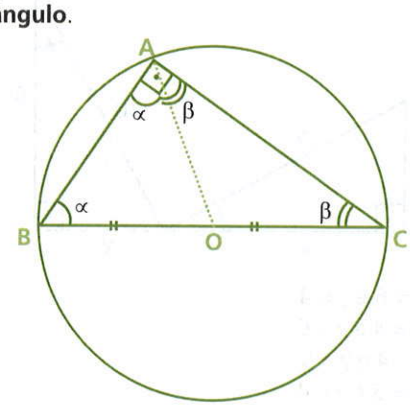


19. Encontre os valores de **x** e **y** na figura:



Importante saber

Se um triângulo está inscrito numa circunferência e um de seus lados é o diâmetro, então esse **triângulo** é **retângulo**.

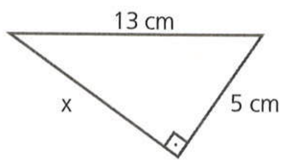


Testes

18. Em um triângulo retângulo, as medidas dos catetos medem, respectivamente, 30 cm e 40 cm. Determine o valor da hipotenusa desse triângulo:

a) 50 cm
b) 60 cm
c) 70 cm
d) 80 cm
e) 100 cm

19. Determine o valor de **x** no triângulo retângulo abaixo:

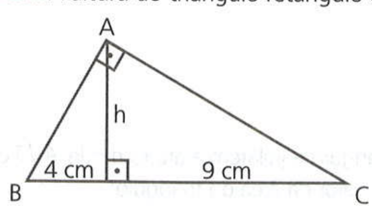


a) 8 cm
b) 9 cm
c) 10 cm
d) 11 cm
e) 12 cm

20. Num triângulo retângulo, os valores das projeções ortogonais dos catetos sobre a hipotenusa são, respectivamente, 6,4 cm e 3,6 cm. Nestas condições, a hipotenusa desse triângulo é igual a:

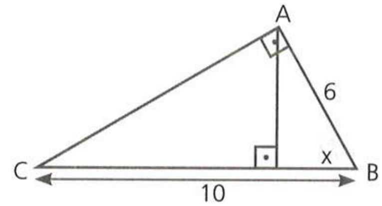
a) 10 cm
b) 12 cm
c) 13 cm
d) 14 cm
e) 15 cm

21. A altura do triângulo retângulo é:



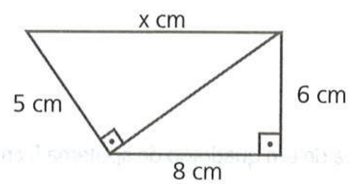
a) 5 cm
b) 6 cm
c) 7 cm
d) 8 cm
e) 10 cm

22. O valor de **x** no triângulo é:



a) 3,2
b) 3,6
c) 4,8
d) 6,4
e) 7,2

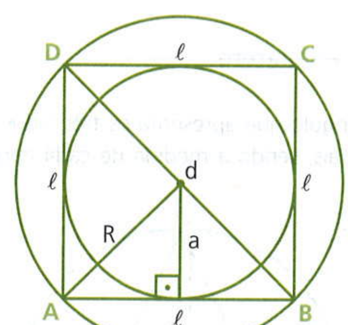
23. Determine o valor de **x** na figura abaixo:



a) 8 cm
b) 10 cm
c) $5\sqrt{5}$ cm
d) $3\sqrt{5}$ cm
e) 15 cm

Polígonos regulares

Quadrado



- **Elementos**

ℓ → lado
d → diagonal
a → apótema (raio da circunferência inscrita)
R → raio da circunferência circunscrita
S → área

- **Formulário**

$$d = \ell\sqrt{2}$$

$$a = \frac{\ell}{2}$$

$$R = \frac{d}{2} \leftrightarrow R = \frac{\ell\sqrt{2}}{2}$$

$$S = \ell^2$$

Exercícios

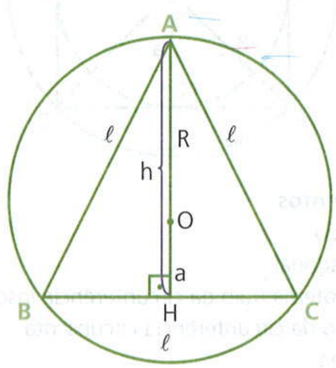
20. Num quadrado de lado igual a 4 cm, determine os valores da diagonal, o raio, a apótema e a área desse quadrado:

21. Calcule a área de um quadrado de apótema 5 cm:

22. Determine a área de um quadrado de perímetro 24 cm:

Triângulo equilátero

É o triângulo que apresenta os três lados e os três ângulos iguais, sendo a medida de cada ângulo igual a 60°.



- **Elementos**

$\ell \rightarrow$ lado
h $\rightarrow$ altura
a $\rightarrow$ apótema (raio da circunferência inscrita)
R $\rightarrow$ raio da circunferência circunscrita
S $\rightarrow$ área

O raio da circunferência inscrita em qualquer polígono regular é denominado **apótema**.

- **Formulário**

$$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

$$a = \frac{h}{3} \leftrightarrow a = \frac{\ell\sqrt{3}}{6}$$

$$R = \frac{2h}{3} \leftrightarrow R = \frac{\ell\sqrt{3}}{3}$$

$$S = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$$

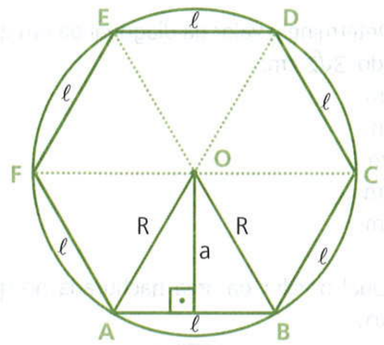
Exercícios

23. Num triângulo equilátero de lado 6 cm, determine as medidas da altura, apótema, raio e área do triângulo:

24. Calcule as medidas do raio e do apótema de um triângulo equilátero de altura igual a 12 cm:

25. Num triângulo equilátero a altura mede $4\sqrt{3}$ cm. Determine o valor da área do triângulo:

Hexágono regular



- **Elementos**

$\ell \longrightarrow$ lado
a $\longrightarrow$ apótema (raio da circunferência inscrita)
R $\longrightarrow$ raio da circunferência circunscrita
S $\longrightarrow$ área

- **Formulário**

$R = \ell$ $\qquad a = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2}$ $\qquad S = \dfrac{3\ell^2\sqrt{3}}{2}$

Exercícios

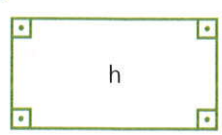
26. Calcule as medidas do raio, apótema e a área de um hexágono regular de lado 6 cm:

27. Determine a área de um hexágono, cujo raio da circunferência circunscrita mede 4 cm:

Áreas das principais figuras planas

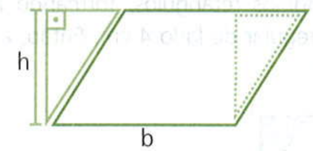
Além dos polígonos regulares, outros polígonos possuem áreas muito utilizadas na geometria plana. São eles:

Retângulo



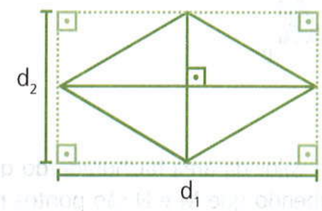
$S = b \,.\, h$

Paralelogramo



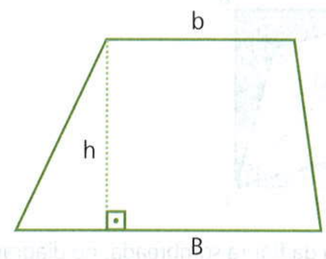
$S = b \,.\, h$

Losango



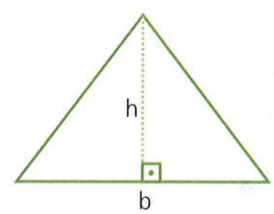
$S = \dfrac{d_1 \,.\, d_2}{2}$

Trapézio



$S = \dfrac{(B + b) \,.\, h}{2}$

Triângulo



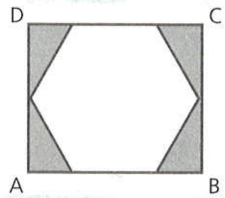
$S = \dfrac{b \,.\, h}{2}$

Exercícios

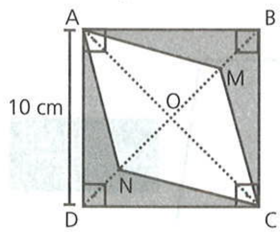
28. Qual o perímetro de um quadrado de área 36 cm²?

29. Determine a área do quadrado representado abaixo:

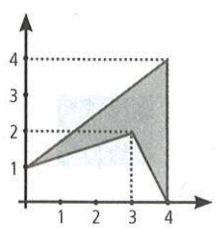
30. (UEM-PR) Do retângulo abaixo foram retirados os quatro triângulos retângulos, formando assim um hexágono regular de lado 4 cm. Então, a área do retângulo é:



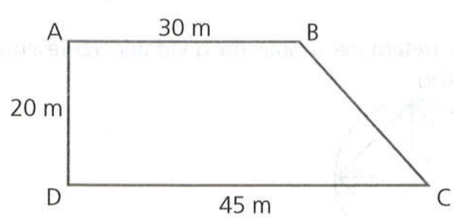
31. Determine o valor da área hachurada do quadrado ABCD, sabendo que M e N são pontos médios dos segmentos $\overline{BO}$ e $\overline{OD}$ da diagonal $\overline{BD}$.



32. (FGV) A área da figura sombreada, no diagrama abaixo, vale:



33. (UNISINOS-RS) Um homem deixou como herança para seus dois filhos um terreno que tem a forma de um trapézio retângulo (conforme figura abaixo). Para que a parte de cada um tivesse a mesma área, os dois filhos resolveram dividir o terreno, traçando uma paralela ao lado $\overline{AD}$. A que distância do ponto D, em metros, deve ser traçada esta paralela?

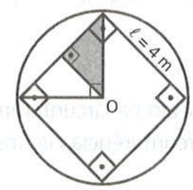


Testes

24. Determine o valor da diagonal de um quadrado de lado $3\sqrt{2}$ cm:

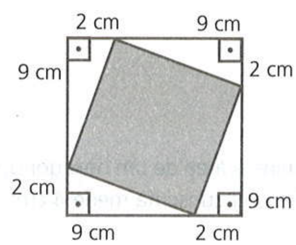
a) 3 m
b) 4 m
c) 5 m
d) 6 m
e) 7 m

25. Qual o valor da área hachurada no quadrado abaixo?



a) 2 m²
b) 4 m²
c) 8 m²
d) 16 m²
e) n.d.a.

26. A área da região hachurada na figura é, em cm²:



a) 50
b) 81
c) 85
d) 90
e) 121

27. Determine a área de um triângulo equilátero de lado 10 cm:

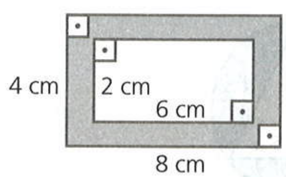
a) 10 cm²
b) 20 cm²
c) 25 cm²
d) $25\sqrt{3}$ cm²
e) $10\sqrt{3}$ cm²

28. A área de um hexágono regular de lado 6 cm é:
a) $9\sqrt{3}$ cm²
b) $18\sqrt{3}$ cm²
c) $24\sqrt{3}$ cm²
d) $36\sqrt{3}$ cm²
e) $54\sqrt{3}$ cm²

29. Encontre o valor do apótema de um hexágono regular de raio $4\sqrt{3}$ cm:
a) $2\sqrt{3}$ cm
b) $4\sqrt{3}$ cm
c) 4 cm
d) 6 cm
e) $6\sqrt{3}$ cm

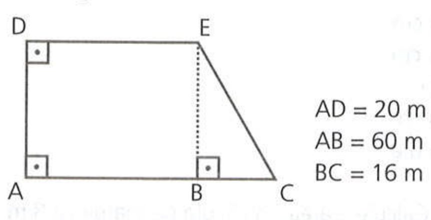
30. Determine o valor do apótema de um hexágono regular de área igual a $24\sqrt{3}$ cm²:
a) $2\sqrt{3}$ cm
b) $4\sqrt{3}$ cm
c) $6\sqrt{3}$ cm
d) $12\sqrt{3}$ cm
e) n. d. a.

31. Calcule a região pintada na figura:



a) 40 cm²
b) 30 cm²
c) 20 cm²
d) 15 cm²
e) 10 cm²

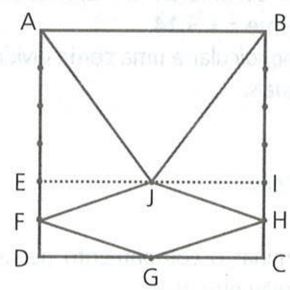
32. (FUVEST-SP) Dois irmãos herdaram um terreno com a seguinte forma e medidas:



Para dividir o terreno em duas partes de mesma área, eles usaram uma reta perpendicular a $\overline{AB}$. Para que a divisão tenha sido feita corretamente, a distância dessa reta ao ponto **A**, em metros, deverá ter sido:

a) 31
b) 32
c) 33
d) 34
e) 35

33. (FATEC-SP) Na figura abaixo, os lados do quadrado ABCD medem 6 cm e os lados $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ estão divididos em 6 partes iguais. Se os pontos **G** e **J** são, respectivamente, os pontos médios dos segmentos $\overline{CD}$ e $\overline{EI}$, então a razão entre as áreas do losango FGHJ e do triângulo ABJ, nessa ordem, é:

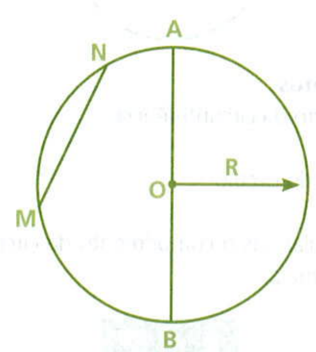


a) $\frac{1}{6}$
b) $\frac{1}{5}$
c) $\frac{1}{4}$
d) $\frac{1}{2}$
e) $\frac{2}{5}$

Circunferência e círculo

Circunferência

É o lugar geométrico no plano dos pontos equidistantes de um ponto dado (centro).



• **Elementos**
O → centro da circunferência
R → raio
C → comprimento da circunferência
MN → corda
AB → diâmetro

Para calcularmos o comprimento da circunferência usamos a fórmula:

$$C = 2\pi \cdot R$$

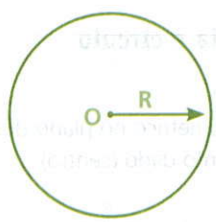
Nos cálculos de circunferência e círculo, usamos aproximadamente $\pi = 3,14$.
Todo raio perpendicular a uma corda divide esta em duas partes iguais.

Exercício

34. Determinar o comprimento de uma circunferência de diâmetro 10 m.

Círculo

É a região do plano limitado por uma circunferência.



• **Elementos**
O → centro da circunferência
R → raio
S → área do círculo

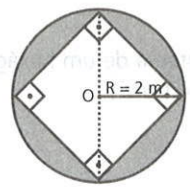
Para calcularmos o comprimento da circunferência usamos a fórmula:

$$S = \pi \cdot R^2$$

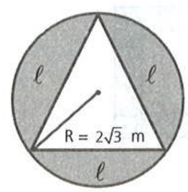
Exercícios

35. Determine a área de um círculo de raio 4 cm:

36. Calcule a área hachurada das figuras abaixo.
a) Quadrado inscrito no círculo:



b) Triângulo equilátero de lado $\ell = 6$ cm inscrito no círculo:

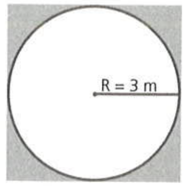


Testes

34. Se o comprimento de uma circunferência é igual a 4π cm, o raio dessa circunferência é:
a) 1 cm
b) 2 cm
c) 3 cm
d) 4 cm
e) n.d.a.

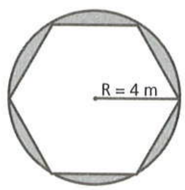
35. Calcule a área do círculo de diâmetro 8 m:
a) 4π m²
b) 8π m²
c) 12π m²
d) 16π m²
e) 20π m²

36. Determine a área do quadrado não ocupada pelo círculo (adote $\pi = 3,14$):



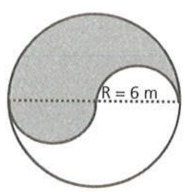
a) 7,74 cm²
b) 8,74 cm²
c) 9,74 cm²
d) 10,74 cm²
e) 11,74 cm²

37. A região hachurada da figura é, em cm²: (hexágono inscrito no círculo)



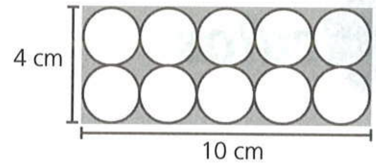
a) $8\,(2\pi - 3\sqrt{3})$
b) $8\,(3\sqrt{3} - 2\pi)$
c) $16\,(2\pi - 3\sqrt{3})$
d) $8\,(\sqrt{3} - \pi)$
e) n. d. a.

38. Calcule a área da região pintada no círculo:



a) 36π cm²
b) 32π cm²
c) 24π cm²
d) 20π cm²
e) 18π cm²

39. Calcule a região pintada na figura (adote $\pi = 3,14$):



a) 8,6 cm²
b) 9,6 cm²
c) 10,6 cm²
d) 12,6 cm²
e) 15,6 cm²

Cálculos

Respostas

Exercício 01: a) $180° \, 50' \, 57''$; b) $155° \, 25' \, 22''$; c) $12° \, 8' \, 2''$; d) $72° \, 27' \, 6''$

Exercício 02: a) 108°; b) $\frac{7\pi}{3}$ rad

Exercício 03: a) 40°; b) 45°; c) 30°

Exercício 04: a) 60°; b) 30°; c) 20°

Exercício 05: a) 160°; b) 110°; c) 60°

Exercício 06: a) 40°; b) 20°; c) 100°

Exercício 07: $S\hat{I} = 720°$; $d = 9$

Exercício 08: 108°

Exercício 09: 900°

Exercício 10: $n = 8$

Exercício 11: a) $x = 8$ e $y = 3$; b) $x = 5$ e $y = 24$

Exercício 12: $x = \frac{16}{3}$; $y = 15$

Exercício 13: $b = 9$; $a = 8$

Exercício 14: $x = 7{,}2$

Exercício 15: $x = 6$

Exercício 16: a) 5; b) 8

Exercício 17: $m = 6{,}4$; $n = 3{,}6$

Exercício 18: $a = 15$; $h = 7{,}2$

Exercício 19: $y = 3\sqrt{13}$; $x = 6$

Exercício 20:
$d = 4\sqrt{2}$ cm; $R = 2\sqrt{2}$ cm; $a = 2$ cm; $b = 16$ cm²

Exercício 21: 100 cm²

Exercício 22: 36 cm²

Exercício 23:
$h = 3\sqrt{3}$ cm; $a = \sqrt{3}$ cm; $R = 2\sqrt{3}$ cm; $S = 9\sqrt{3}$ cm²

Exercício 24: $R = 8$ cm; $a = 4$ cm

Exercício 25: $S = 16\sqrt{3}$ cm²

Exercício 26: a) $R = 6$ cm; $S = 54\sqrt{3}$ cm²; $a = 3\sqrt{3}$ cm

Exercício 27: $R = 4$ cm; $S = 24\sqrt{3}$ cm²

Exercício 28: 24 cm

Exercício 29: 18 cm²

Exercício 30: $32\sqrt{3}$ cm

Exercício 31: 50 cm²

Exercício 32: 4,5 u.a.

Exercício 33: 18,75 m

Exercício 34: 10π cm

Exercício 35: 16π cm²

Exercício 36: a) $4\pi - 8$ m²; b) $12\pi - 9\sqrt{3}$ cm²

Gabarito

01) E	02) B	03) A	04) C	05) D	06) B
07) A	08) D	09) B	10) C	11) A	12) A
13) B	14) C	15) B	16) D	17) C	18) A
19) E	20) A	21) B	22) B	23) C	24) D
25) A	26) C	27) D	28) E	29) D	30) A
31) C	32) D	33) D	34) B	35) D	36) A
37) A	38) E	39) A			

Sumário

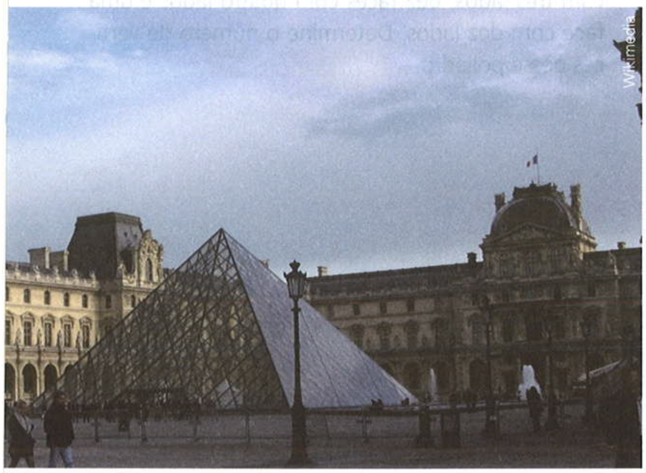
Avaliações

Anotações

Matemática

5 E

Geometria espacial



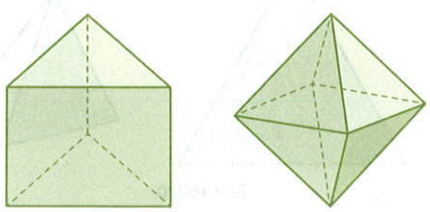
Pirâmide do Museu do Louvre, Paris, França

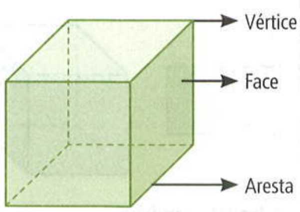
Poliedros

A palavra poliedro tem origem grega que significa *poli* = várias + *edros* = faces, portanto, definimos poliedro como sendo sólidos formados por várias faces representadas por polígonos planos não coplanares.

São exemplos de poliedros:

Elementos





- **Faces**
  São os polígonos que formam o poliedro.

- **Arestas**
  São os encontros dos lados dos polígonos.

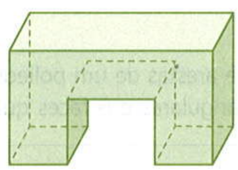
- **Vértices**
  São os pontos de encontro de três ou mais arestas.

Os poliedros recebem seus nomes de acordo com o número de faces.

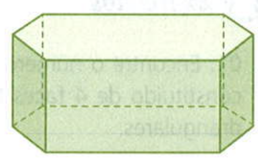
Exemplos:

4 faces: Tetraedro
5 faces: Pentaedro
6 faces: Hexaedro
7 faces: Heptaedro
8 faces: Octaedro

Os poliedros podem ser classificados em **convexos** e **não convexos** (côncavos).



Poliedro convexo



Poliedro não convexo

Cálculo do número de arestas

Para determinarmos o número de arestas de um poliedro, utilizaremos a seguinte relação:

$$A = \frac{3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \ldots + nF_n}{2}$$

Onde:

$F_3 \rightarrow$ número de faces triangulares
$F_4 \rightarrow$ número de faces quadrangulares
$F_5 \rightarrow$ número de faces pentagonais
$F_n \rightarrow$ número de faces com **n** lados

Nesta relação utilizaremos apenas os tipos de faces que aparecerem nos poliedros dos exercícios. Por exemplo, se o poliedro tem apenas faces quadrangulares e triangulares o número de arestas será:

$$A = \frac{3F_3 + 4F_4}{2}$$

Teorema de Euler

"Em qualquer poliedro convexo, a soma do número de faces com o número de vértices é igual ao número de arestas aumentado de duas unidades."

$$\underbrace{V}_{\text{Número de vértices}} + \underbrace{F}_{\text{Número de faces}} = \underbrace{A}_{\text{Número de arestas}} + 2$$

Para superfície poliédrica aberta, é válida a relação: **V + F = A + 1**.

Soma dos ângulos das faces de um poliedro

A soma dos ângulos de todas as faces de um poliedro convexo com **V** vértices é dada pela relação:

$$S = (V - 2) \cdot 360°$$

Exercícios

01. Encontre o número de arestas de um poliedro constituído de 4 faces triangulares e 6 faces quadrangulares.

02. Determine o número de vértices de um poliedro convexo que possui 7 faces e 15 arestas.

03. Determine o número de vértices de um poliedro constituído de 4 faces quadrangulares e 6 faces pentagonais.

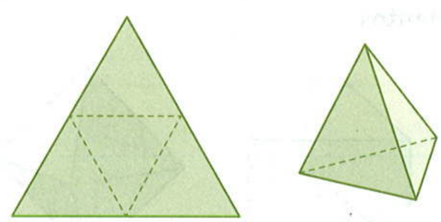
04. (UFPE) Um poliedro convexo possui dez faces com três lados, dez faces com quatro lados e uma face com dez lados. Determine o número de vértices desse poliedro.

05. Um poliedro convexo possui 12 arestas e 8 faces. Determine a soma dos ângulos internos destas faces.

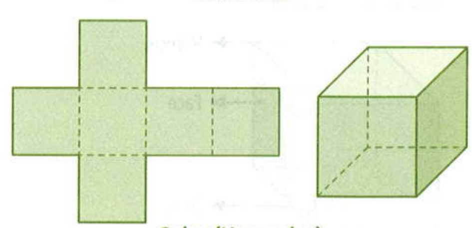
Poliedros regulares

Um poliedro é regular quando todas as suas faces são polígonos regulares de medidas iguais com todos seus ângulos poliédricos, também, de medidas iguais.

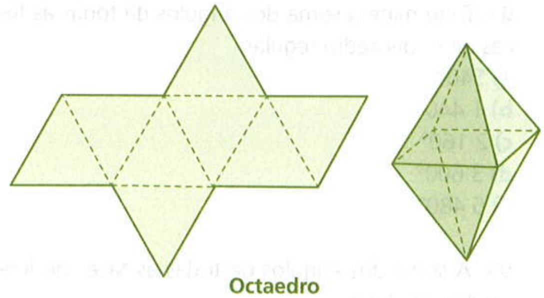
Existem apenas cinco poliedros regulares, conhecidos como **poliedros de Platão**. Vejamos:



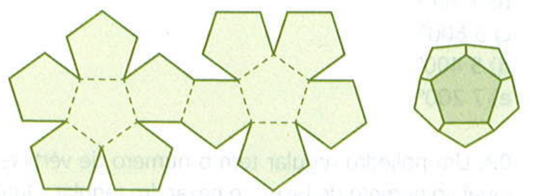
Tetraedro



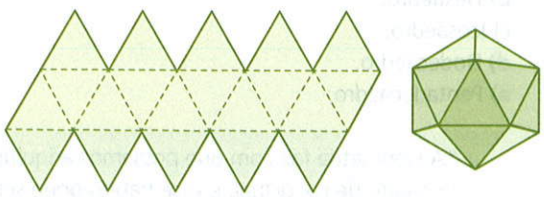
Cubo (Hexaedro)



Octaedro



Dodecaedro



Icosaedro

- **Tetraedro:** 4 faces triangulares iguais.
- **Hexaedro:** 6 faces quadrangulares iguais.
- **Octaedro:** 8 faces triangulares iguais.
- **Dodecaedro:** 12 faces pentagonais iguais.
- **Icosaedro:** 20 faces triangulares iguais.

Como nos poliedros regulares todas as faces são iguais, podemos simplificar a relação

$$A = \frac{3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \ldots + nF_n}{2} \text{ para}$$

$$n \cdot F = 2A$$

Onde **n** é o número de lados do polígono que formam o poliedro.

Sendo **p** o número de arestas que concorrem (se encontram) em cada vértice, tem-se:

$$p \cdot v = 2A$$

Exercícios

06. Determine o número de arestas e vértices dos cinco poliedros de Platão.

a) Tetraedro:

b) Hexaedro:

c) Octaedro:

d) Dodecaedro:

e) Icosaedro:

07. Encontre a soma dos ângulos de todas as faces do icosaedro regular.

Testes

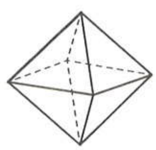
01. (UNIUBE-MG) Um poliedro convexo é formado por 6 faces quadrangulares e 8 triângulares. O número de vértices desse poliedro é:

a) 8
b) 10
c) 12
d) 16
e) 24

02. (PUCCAMP-SP) Sobre as sentenças:
I. Um octaedro regular tem 8 faces quadradas.
II. Um dodecaedro regular tem 12 faces pentagonais.
III. Um icosaedro regular tem 20 faces triangulares.
É correto afirmar que apenas:
a) I é verdadeira;
b) II é verdadeira;
c) III é verdadeira;
d) I e II são verdadeiras;
e) II e III são verdadeiras.

03. (UEL-PR) Um poliedro convexo tem 16 arestas e nove vértices. Qual é o número de faces do poliedro?
a) 7
b) 8
c) 10
d) 12
e) 9

04. (UFSC) Dado o poliedro regular, é correto afirmar:



01) É um tetraedro.
02) É um octaedro.
04) Todas as arestas são iguais.
08) Obedece a relação de Euler.
16) Suas faces são triângulos equiláteros.
32) Tem 12 arestas.

05. Um poliedro é constituído de 5 faces quadrangulares e 6 faces hexagonais. Determine seu número de arestas:
a) 20
b) 25
c) 28
d) 30
e) 32

06. (UFRGS) Um poliedro convexo de onze faces tem seis faces triangulares e cinco faces quadrangulares. Os números de arestas e vértices do poliedro são, respectivamente:
a) 34 e 10
b) 19 e 10
c) 34 e 20
d) 12 e 10
e) 19 e 12

07. Determine a soma dos ângulos de todas as faces do dodecaedro regular:
a) 540°
b) 1 440°
c) 2 160°
d) 3 600°
e) 6 480°

08. A soma dos ângulos de todas as faces do icosaedro regular é:
a) 1 800°
b) 2 100°
c) 3 600°
d) 5 400°
e) 7 200°

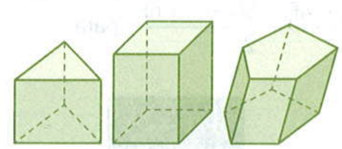
09. Um poliedro regular tem o número de vértices igual ao número de faces do hexaedro regular. Qual é este poliedro?
a) Octaedro.
b) Hexaedro.
c) Icosaedro.
d) Dodecaedro.
e) Pentadecaedro.

> "A Geometria faz com que possamos adquirir o hábito de raciocinar, e esse hábito pode ser empregado, então, na pesquisa da verdade e ajudar-nos na vida."
>
> Jacques Bernoulli

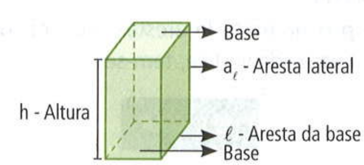
Prismas

Denominamos prisma a toda superfície poliédrica fechada que possuir duas faces opostas, paralelas e de medidas iguais (bases), e as demais faces paralelogramos (faces laterais).

São exemplos de prismas:

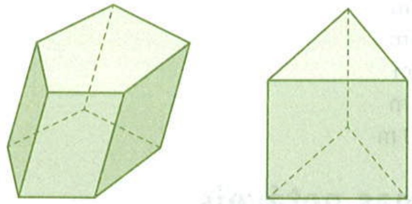


Elementos



Classificação

- **Retos e oblíquos**



Oblíquo
$h < a\ell$

Reto
$h = a\ell$

Notação

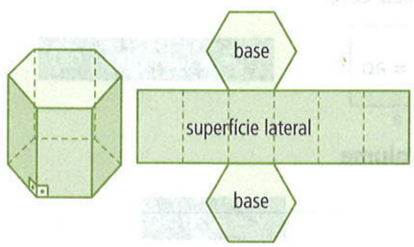
- **Prisma triangular:** Bases triangulares.
- **Prisma quadrangular:** Bases quadradas.
- **Prisma hexagonal:** Bases hexagonais.

Prisma regular

Um prisma é dito regular quando, além de reto, as bases são polígonos regulares.

Áreas da superfície lateral e total de um prisma

Para visualizarmos e entendermos melhor as áreas de um prisma, observe as figuras abaixo:



- **Área lateral**

Para calcularmos a área lateral de um prisma, basta fazermos a soma das áreas de todas as faces laterais. Podemos efetuar esse cálculo utilizando a fórmula:

$$S_L = \underbrace{2p}_{\text{Perímetro da base}} \cdot \underbrace{h}_{\text{Altura do prisma}}$$

- **Área da base**

Para calcularmos a área da base de um prisma, é conveniente recordarmos a área de alguns polígonos da geometria plana:

Triângulo equilátero	Quadrado	Hexágono regular
$S_B = \dfrac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$	$S_B = \ell^2$	$S_B = \dfrac{3\ell^2\sqrt{3}}{2}$

- **Área total**

Para o cálculo da área total, basta raciocinarmos que ela é a soma da área lateral com as áreas das bases, portanto:

$$S_T = 2S_B + S_L$$

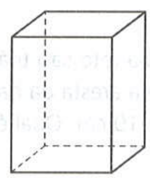
Volume de um prisma

Para o cálculo do volume, devemos entender que é uma grandeza que mede a capacidade do sólido. Nestas condições, o volume (V) será dado por:

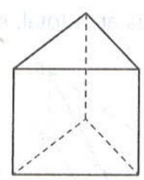
$$V = S_B \cdot h$$

Exercícios

08. Um prisma quadrangular regular tem a aresta da base medindo 3 m. Sabendo que sua altura é igual a 4 m, determine a área lateral, total e o volume:



09. Calcule a área total e o volume de um prisma triangular regular, cuja aresta da base mede 2 m e sua altura $5\sqrt{3}$ m:

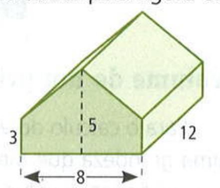


Testes

10. A área lateral de um prisma pentagonal regular, cuja aresta da base mede 5 cm e a altura 8 cm é:

a) 160 cm²
b) 180 cm²
c) 200 cm²
d) 230 cm²
e) 240 cm²

11. (VUNESP) O volume de ar contido em um galpão com a forma e dimensões dadas pela figura é:



a) 288
b) 384
c) 480
d) 360
e) 768

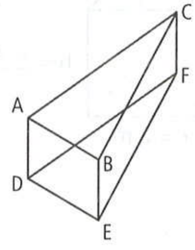
12. Um prisma quadrangular regular tem aresta da base igual a 5 m e altura 6 m. Determinar a área total do prisma:

a) 120 m²
b) 130 m²
c) 140 m²
d) 150 m²
e) 170 m²

13. (UFRGS) As bases de um prisma reto são triângulos equiláteros, sabendo-se que a aresta da base é 6 cm e que a altura do prisma é 10 cm. Qual é o seu volume?

a) $180\sqrt{3}$ cm³
b) $90\sqrt{3}$ cm³
c) $81\sqrt{3}$ cm³
d) $45\sqrt{3}$ cm³
e) $30\sqrt{3}$ cm³

14. (PUC-SP) Na figura tem-se o prisma reto ABCDEF, no qual DE = 6 cm, EF = 8 cm e $\overline{DE} \perp \overline{EF}$. Se o volume desse prisma é 120 cm³, a sua área total, em centímetros quadrados, é:



a) 144
b) 156
c) 160
d) 168
e) 172

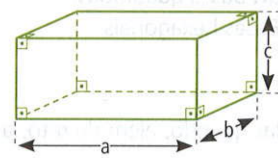
15. (UFPA) Num prisma regular de base hexagonal, a área lateral mede 36 m² e a altura é 3 m. A aresta da base é:

a) 2 m
b) 4 m
c) 6 m
d) 8 m
e) 10 m

Prismas notáveis

Paralelepípedo retângulo (ortoedro)

Denominamos paralelepípedo retângulo, o prisma em que todas as faces são retângulos.



Dimensões do sólido:
a → comprimento
b → largura
c → altura

- **Área lateral**

$S_L = ac$ (a, c) $\quad S_L = bc$ (b, c)

$$S_L = 2\,(ac + bc)$$

- **Área total**

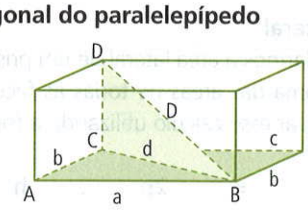
$S_B = ab$ (a, b)

$$S_T = 2\,(ab + ac + bc)$$

- **Volume**

$$V = a \,.\, b \,.\, c$$

- **Diagonal do paralelepípedo**



Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos:

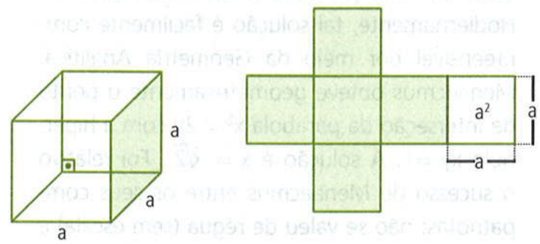
$$d^2 = a^2 + b^2 \qquad D^2 = d^2 + c^2$$

Portanto:

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$$
$$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Cubo (hexaedro regular)

É um prisma onde todas as faces são quadradas.



- **Área lateral**

$$S_L = 4a^2$$

- **Área total**

$$S_T = 6a^2$$

- **Volume**

$$V = a^3$$

- **Diagonal do cubo**

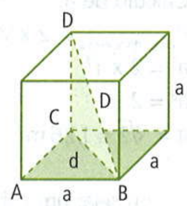
Como o cubo é um paralelepípedo com todas as faces iguais, temos:

$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$

$D^2 = a^2 + a^2 + a^2$

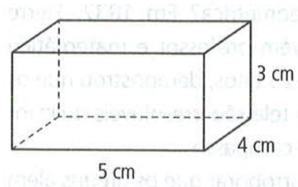
$D = \sqrt{3a^2}$

$D = a\sqrt{3}$



Exercícios

10. Determine a área lateral, a área total, o volume e a diagonal do paralelepípedo abaixo:



11. As dimensões de um parelelepípedo formam uma P.A. de razão 2. Se a soma destas dimensões é 30 cm, qual é o volume deste paralelepípedo?

12. Encontre a área lateral, a área total, o volume e a diagonal do cubo de aresta 3 cm:

13. (PUC-SP) Um cubo tem área total igual a 72 cm². Determine o valor da sua diagonal:

Leitura Complementar

O 2.º problema clássico da Geometria: A duplicação do cubo

Prêmio Nobel por duas vezes, Albert Einstein (1879-1955) se faz oportuno: "Como pode a Matemática, sendo produto do pensamento humano, independente da experiência, se adaptar tão admiravelmente aos objetos da realidade?"

Apropriadamente já se definiu a Matemática como "rainha e serva de todas as ciências". E os apanágios de sua majestade são o rigor, a lógica e a harmonia.

Rigor e lógica devem ter sido a percepção do rei Ptolomeu, que ao folhear os Elementos de Euclides (c. 325 – c. 265 a.C.) perguntou esperançosamente ao autor se não havia um caminho mais suave para aprender Geometria.

Lacônico, Euclides teria respondido: "Não há estrada real para a Geometria".

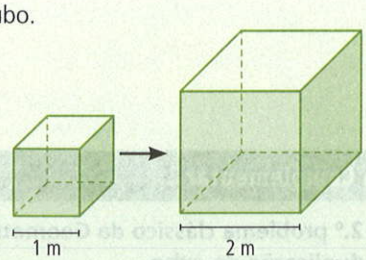
Em contrapartida, o renomado escritor argentino Ernesto Sábato descreve a Geometria como "um mundo de infinita harmonia," e que quando tinha doze anos assistiu à demonstração de um de seus teoremas e sentiu "uma espécie de vertigem".

Ao longo da história, a Geometria glorifica dois problemas que se tornaram clássicos: a quadratura do círculo e a duplicação do cubo.

O problema da duplicação do cubo ou problema deliano

Durante o cerco espartano da Guerra do Peloponeso, conta uma lenda que em 429 a.C. uma peste dizimou um quarto da população de Atenas, matando inclusive Péricles. Diz-se que uma plêiade de sábios fora enviada ao oráculo de Apolo, em Delos, para inquirir como a peste poderia ser eliminada.

O oráculo respondeu que o **altar cúbico de Apolo deveria ser duplicado**. Os atenienses celeremente dobraram as medidas das arestas do cubo.



A peste, em vez de se amainar, recrudesceu. Qual o erro?

Em vez de dobrar, os atenienses octoplicaram o volume do altar.

Pois:

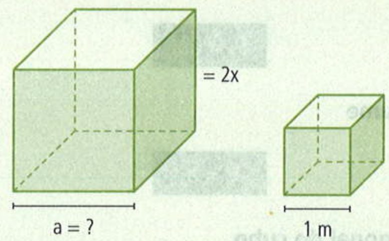
para $a = 1 \rightarrow V_{cubo} = 1^3 = 1$

para $a = 2 \rightarrow V_{cubo} = 2^3 = 8$

A complexidade do problema deve-se ao fato de que os gregos procuravam uma solução geométrica. E mais um complicador: com régua (sem escala) e compasso.

Ainda no século IV a.C., o geômetra grego Menaecmus resolveu o problema com o traçado de uma parábola e de uma hipérbole. Hodiernamente, tal solução é facilmente compreensível por meio da Geometria Analítica. Menaecmus obteve geometricamente o ponto de interseção da parábola $x^2 = 2y$ com a hipérbole $xy = 1$. A solução é $x = \sqrt[3]{2}$. Foi relativo o sucesso de Menaecmus entre os seus compatriotas: não se valeu de régua (sem escala) e compasso apenas!

A solução deste problema é trivial com os recursos da Álgebra: procura-se a aresta (a) de um cubo, cujo volume seja o dobro do volume de um cubo de $a = 1$ ($V_{cubo} = a^3$):



Cálculo de a:

$V_{\text{cubo de aresta a}} = 2 \times V_{\text{cubo de aresta 1}}$

$a^3 = 2 \times 1^3$

$a^3 = 2$

$a = \sqrt[3]{2} \cong 1{,}26\,m$

ou seja: um cubo de $a = \sqrt[3]{2} = 1{,}26\,m$ tem o dobro do volume de um cubo cuja aresta seja 1 m.

Infere-se que os dois problemas clássicos da Geometria – quadratura do círculo e duplicação do cubo – têm solução trivial através da Álgebra.

E a solução geométrica? Em 1837, Pierre L. Wantzel, um jovem professor e matemático francês, de apenas 23 anos, demonstrou que os dois problemas em tela são irresolúveis utilizando apenas régua e compasso.

É importante corroborar que os gregos além de não conhecerem a Álgebra desenvolviam a Matemática como um desafio intelectual ou pelo sublime prazer de pensar.

Disponível em: <www.geometriaanalitica.com.br>
Acesso em: 16 jun. 2010.

Testes

16. Um paralelepípedo retângulo tem 12 m de comprimento, 3 m de largura e 4 m de altura. A área total e o volume desse sólido são, respectivamente:

a) 162 m^2 e 144 m^3
b) 192 m^2 e 144 m^3
c) 192 m^2 e 184 m^3
d) 162 m^2 e 184 m^3
e) 182 m^2 e 144 m^3

17. Um cubo de área total 150 cm^2. O volume desse cubo é, em centímetros cúbicos:

a) 125
b) 130
c) 135
d) 140
e) 150

18. (UEPG-PR) As medidas internas de uma caixa-d'água em forma de paralelepípedo retângulo são: 1,2 m; 1 m e 0,7 m. Sua capacidade é de:
(Dica: 1 m^3 = 1 000 litros)

a) 8 400 litros
b) 84 litros
c) 840 litros
d) 8,4 litros
e) n.d.a.

19. Um cubo tem volume 64 cm^3. A área total desse cubo é:

a) 84 cm^2
b) 96 cm^2
c) 64 cm^2
d) 128 cm^2
e) 144 cm^2

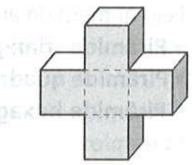
20. (FAFI-MG) As dimensões de uma piscina olímpica são: 50 m de comprimento, 25 m de largura e 3 m de profundidade. O seu volume, em litros, é:

a) 3 750
b) 37 500
c) 375 000
d) 3 750 000
e) 37 500 000

21. (CESCEA-SP) Se a soma das arestas de um cubo é igual a 72 cm, então o volume do cubo é igual a:

a) 100 cm^3
b) 40 cm^3
c) 144 cm^3
d) 16 cm^3
e) 216 cm^3

22. (UFCE) Os cinco cubos idênticos e justapostos formam uma cruz, como mostra a figura. Se a área total da cruz é 198 cm^2, então o volume, em cm^3, de cada cubo é igual a:



a) $2\sqrt{2}$
b) $3\sqrt{3}$
c) 8
d) 27
e) 64

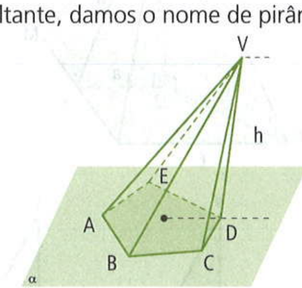
Desafio

(MACKENZIE-SP) Dispondo-se de uma folha de cartolina medindo 50 cm de comprimento por 30 cm de largura, pode-se construir uma caixa aberta, cortando-se um quadrado de 8 cm de lado em cada canto da folha. O volume dessa caixa, em cm^3, será:

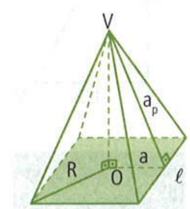
a) 1 244
b) 1 828
c) 2 324
d) 3 808
e) 12 000

Pirâmides

Considere, sobre um plano α, um polígono qualquer ABCDE. De um ponto exterior **V**, vamos traçar segmentos de reta a todos os pontos do polígono. Ao sólido resultante, damos o nome de pirâmide.



Elementos



aℓ → aresta lateral
$\mathbf{a_p}$ → apótema da pirâmide
ℓ → aresta da base
a → apótema da base
R → raio da circunferência circunscrita da base
h → altura

Classificação

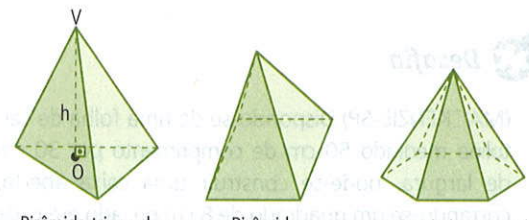
Podemos classificar as pirâmides como:

- **Regular:** Quando a base é um polígono regular e a altura intercepta o centro O da base.
- **Irregular:** Quando não satisfaz uma das condições anteriores.

Pelo número de arestas da base:

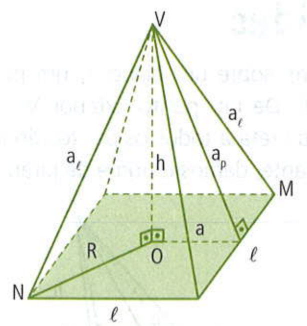
- **Pirâmide triangular:** A base é um triângulo.
- **Pirâmide quadrangular:** A base é um quadrado.
- **Pirâmide hexagonal:** A base é um hexágono.

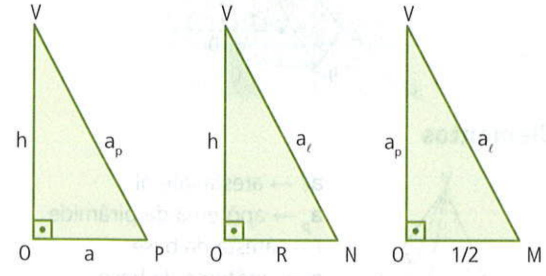
Exemplos:



Pirâmide triangular regular — Pirâmide quadrangular regular — Pirâmide hexagonal regular

Relações métricas entre os elementos das pirâmides regulares





I. $a_p^2 = a^2 + h^2$

II. $a_\ell^2 = R^2 + h^2$

III. $a_\ell^2 = a_p^2 + \left(\dfrac{\ell}{2}\right)^2$

Exercícios

14. Uma pirâmide quadrangular regular tem aresta da base medindo 8 cm e altura 3 cm. Determine o apótema dessa pirâmide.

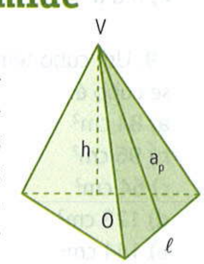
15. Em uma pirâmide regular, o apótema mede 12 cm e o lado da base 18 cm. Calcule o valor da aresta lateral.

16. Calcular a altura de uma pirâmide regular em que a aresta lateral mede 5 cm e o raio da base 3 cm.

Áreas da superfície lateral e total de uma pirâmide

- **Área lateral**

Como no prisma, para obtermos a área lateral de uma pirâmide, basta fazermos a soma das áreas de todas as faces laterais (triângulos isósceles de base **l** e altura **ap**). Esse cálculo pode ser feito utilizando a fórmula:



$$S_L = \underbrace{P}_{\text{Semiperímetro da base}} \cdot \underbrace{a_p}_{\text{Apótema da pirâmide}}$$

- **Área da base**

Da geometria plana tem-se:

Triângulo equilátero	Quadrado	Hexágono regular
$S_B = \dfrac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$	$S_B = \ell^2$	$S_B = \dfrac{3\ell^2\sqrt{3}}{2}$

• **Área total**

$$S_T = S_B + S_L$$

Volume de uma pirâmide

$$V = \frac{S_B \cdot h}{3}$$

Exercícios

17. Calcular a área lateral, total e o volume de uma pirâmide quadrangular regular, cuja altura mede 12 cm e a aresta da base 10 cm:

18. Determinar a área total e o volume de uma pirâmide triangular regular, cujo lado da base mede 4 m e a altura 3 m:

Testes

23. Encontre o apótema de uma pirâmide quadrangular regular onde a aresta da base mede 6 cm e a aresta lateral 5 cm:

a) 1 cm
b) 2 cm
c) 3 cm
d) 4 cm
e) 5 cm

24. Qual o valor da altura de uma pirâmide regular de apótema 10 cm e apótema da base 6 cm?

a) 8 cm
b) 7 cm
c) 6 cm
d) 5 cm
e) 4 cm

25. (UFMG) A área total de uma pirâmide regular, de altura 30 mm e base quadrada de lado 80 mm, mede, em mm²:

a) 44 000
b) 56 000
c) 60 000
d) 65 000
e) 14 400

26. Numa pirâmide de base quadrangular regular de aresta 2 cm e área lateral 30 cm², qual o valor da área total?

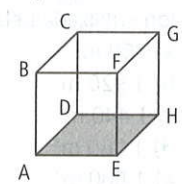
a) 34 cm²
b) 38 cm²
c) 40 cm²
d) 44 cm²
e) 48 cm²

27. A área total de um tetraedro regular de aresta 4 cm é igual a:

a) $8\sqrt{3}$ cm²
b) $10\sqrt{3}$ cm²
c) $12\sqrt{3}$ cm²
d) $14\sqrt{3}$ cm²
e) $16\sqrt{3}$ cm²

28. (PUC-SP) As arestas de um cubo medem 12 cm (veja a figura). Qual o volume da pirâmide de vértice E e base ABCD?

a) 432 cm³
b) 576 cm³
c) 864 cm³
d) 1 440 cm³
e) 1 728 cm³



29. Uma pirâmide regular tem por base um hexágono inscrito em um círculo de raio igual a $\sqrt{3}$ m e sua altura é o dobro do lado da base. Determine o volume dessa pirâmide:

a) $9\sqrt{3}$ m³
b) 9 m³
c) 18 m³
d) 3 m³
e) n.d.a.

30. (UNIFICADO) Em relação à pirâmide regular de base quadrada, com aresta da base 6 e a aresta lateral 5, analise as afirmativas:

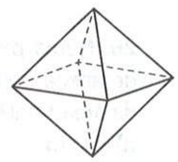
I. Sua área lateral vale 48.
II. Sua área total vale 84.
III. O seu volume é falta $10\sqrt{2}$.

Marque:

a) Se apenas a afirmativa I for verdadeira.

b) Se apenas a afirmativa II for verdadeira.
c) Se apenas a afirmativa III for verdadeira.
d) Se as afirmativas I e II forem verdadeiras.
e) Se as afirmativas I e III forem verdadeiras.

31. (PUCCAMP-SP) Um octaedro regular é um poliedro constituído de 8 faces triangulares congruentes entre si e ângulos poliédricos congruentes entre si, conforme mostra a figura.

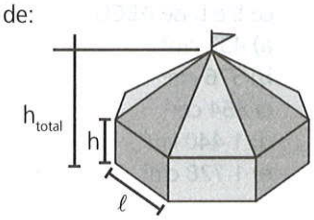


Se o volume desse poliedro é $72\sqrt{2}$ cm³, a medida de sua aresta, em cm², é:

a) $\sqrt{2}$
b) 3
c) $3\sqrt{2}$
d) 6
e) $6\sqrt{2}$

32. (UTFPR) Em "Imaginópolis" chegou o "Grande Circo Geométricus", cuja tenda tem o formato de uma pirâmide hexagonal regular justaposta sobre um prisma hexagonal regular de aresta da base $\ell = 20$ m e altura $h = 3$ m. Considerando que a altura total da tenda é $h_{total} = (3 + 2\sqrt{69})$m, a quantidade total de lona utilizada nela é de:

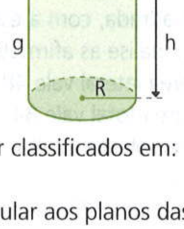
a) 360 m²
b) 1 920 m²
c) 1 440 m²
d) 1 560 m²
e) 1 800 m²



Cilindros

Tomemos 2 círculos idênticos em planos paralelos distintos. Ao unirmos todos os pontos do 1.° círculo a todos os pontos do 2.°, teremos uma região do espaço a qual chamaremos de cilindro.

Elementos

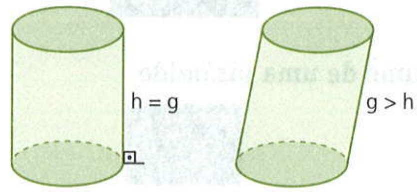


R → raio da base
h → altura do cilindro
g → geratriz

Os cilindros podem ser classificados em:

- **Reto**
A geratriz é perpendicular aos planos das bases.

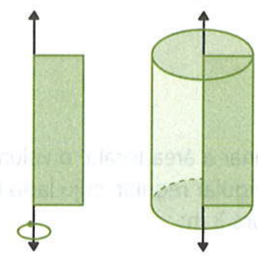
- **Oblíquo**
A geratriz não é perpendicular aos planos das bases.



Cilindro circular reto **Cilindro oblíquo**

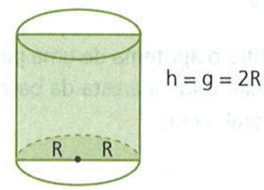
Cilindro de revolução

É um cilindro gerado pela rotação de um retângulo em torno de um de seus lados. O cilindro de revolução é reto e circular (as bases são círculos).

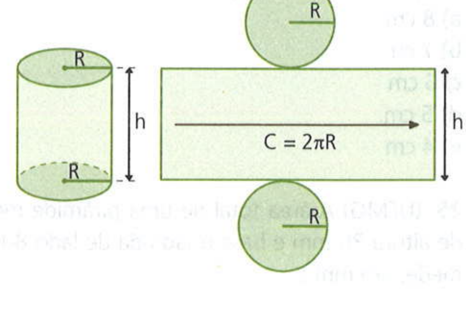


Cilindro equilátero

É o cilindro reto no qual a geratriz (altura) é igual ao dobro do raio da base.



Áreas da superfície lateral e total de um cilindro



- **Área da base (círculo)**

$$S_B = \pi R^2$$

- **Área lateral**

$$S_L = 2\pi Rh$$

- **Área total**

$$S_T = 2S_B + S_L \rightarrow S_T = 2\pi R (h+R)$$

Volume de um cilindro

$$V = S_B \cdot h \rightarrow V = \pi R^2 \cdot h$$

No cilindro equilátero, basta trocar **h** por **2R**.

Exercícios

19. Um cilindro circular reto tem altura medindo 6 cm e raio da base 2 cm. Determine a área lateral, a área total e o volume desse cilindro.

20. Num cilindro equilátero, o diâmetro da base mede 6 cm. Determine a área total e o volume desse cilindro.

Testes

33. Qual a área lateral de um cilindro de revolução de raio 3 cm e geratriz 5 cm?

a) 30π cm²
b) 25π cm²
c) 20π cm²
d) 15π cm²
e) 10π cm²

34. Determine o volume de um cilindro equilátero de diâmetro da base igual a 10 cm.

a) $1\,000\pi$ cm³
b) 750π cm³
c) 500π cm³
d) 300π cm³
e) 250π cm³

35. (UFV-MG) Para se construir uma lata cilíndrica de base circular, sem tampa, com 20 cm de diâmetro de base e 25 cm de altura, são gastos x cm² de material. O valor de x é:

a) 400π
b) 600π
c) 300π
d) 700π
e) 500π

36. (UFAM) Uma lata de cerveja tem a forma cilíndrica, com 6 cm de diâmetro e 12 cm de altura. Quantos ml de cerveja cabem nessa lata.
(1 cm³ = 1 ml $\pi = 3{,}14$)

a) 367,38 ml
b) 339,12 ml
c) 250,33 ml
d) 150,72 ml
e) 108,57 ml

37. (UFGO) Para encher de água um reservatório que tem a forma de um cilindro circular reto, são necessárias 5 horas. Se o raio da base é 3 m e a altura 10 m, o reservatório recebe água à razão de:

a) 18π m³ por hora.
b) 30π m³ por hora.
c) 6π m³ por hora.
d) 20π m³ por hora.
e) n.d.a.

38. Um retângulo de 4 m de largura e 5 m de comprimento gira em torno do lado maior. A área lateral e o volume do sólido gerado são, respectivamente:

a) 40 m² e 80 m³
b) 40π m² e 80 m³
c) 40π m² e 80π m³
d) 60π m² e 80π m³
e) 40π m² e 40π m³

39. (UCDB-DF) Um cilindro reto, cuja base é um círculo de raio R = 3 m, tem 108π m³ de volume. Então, a área total desse cilindro é:

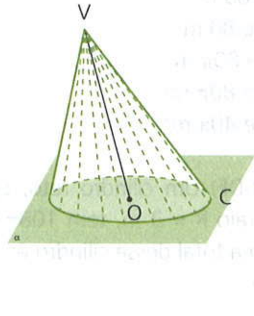
a) 126π m²
b) 81π m²
c) 72π m²
d) 90π m²
e) 108π m²

40. (PUCCAMP-SP) Numa indústria, deseja-se utilizar tambores cilíndricos para a armazenagem de certo tipo de óleo. As dimensões dos tambores serão 30 cm para o raio da base e 80 cm para a altura. O material utilizado na tampa e na lateral custa R$ 100,00 o metro quadrado. Devido à necessidade de um material mais resistente no fundo, o preço do material para a base inferior é de R$ 200,00 o metro quadrado. Qual o custo de material para a confecção de um desses tambores sem contar as perdas de material?
(Em seus cálculos considere $\pi = 3,14$.)
a) R$ 235,50
b) R$ 242,50
c) R$ 247,50
d) R$ 249,50
e) R$ 250,00

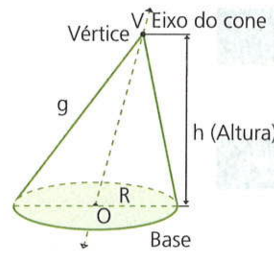
41. (UNIFOR-CE) Deseja-se projetar uma lata cilíndrica de leite condensado que tenha volume de 400 cm³. Se a altura da lata cilíndrica é de 8 cm, a medida do raio da base deverá ser, em centímetros, aproximadamente:
(Dado: considere $\pi = 3,1$)
a) 4,0
b) 3,5
c) 3,0
d) 2,8
e) 2,5

Cone

Se considerarmos um plano α, um círculo **C** contido neste plano e um ponto **V** fora dele, chamamos de cone circular ao conjunto de todos os segmentos que unem o ponto **V** ao círculo **C**.



Elementos

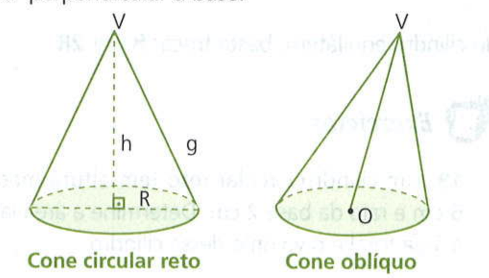


R → raio da base
g → geratriz

Os cones podem ser classificados em:

- **Reto**
O cone é denominado reto se o eixo (**VO**) for perpendicular à base.

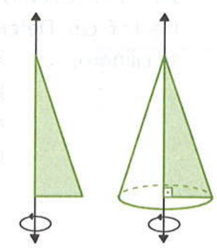
- **Oblíquo**
O cone é denominado oblíquo quando o eixo (**VO**) não for perpendicular à base.



No cone circular reto, aplicando o Teorema de Pitágoras, temos: $g^2 = h^2 + R^2$.

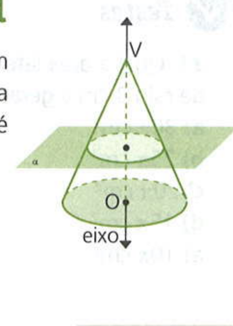
Cone de revolução

É o sólido gerado pela rotação completa de um triângulo retângulo em torno de um dos catetos. O **cone circular reto** é também chamado de **cone de revolução**.



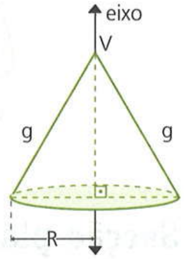
Secção transversal

É a intersecção do cone com um plano paralelo à base, esta secção como a base também é um círculo.



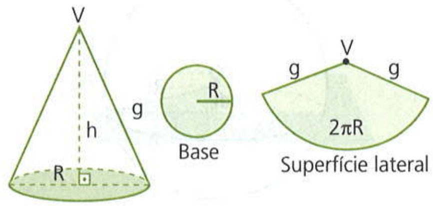
Secção meridiana

É o triângulo formado dentro do cone, cujos lados são **2R**, **g** e **g**. Normalmente será um triângulo isósceles, exceto no caso do **cone equilátero**, quando será um triângulo equilátero.



O cone é denominado equilátero quando a geratriz é igual ao dobro do raio.
g = 2R

Áreas da superfície lateral e total de um cone circular reto



- **Área da base (círculo)**

$$S_B = \pi R^2$$

- **Área lateral**

$$S_L = \pi R g$$

- **Área total**

$$S_T = S_B + S_L \rightarrow S_T = \pi R\,(g + R)$$

Volume de um cone

$$V = \frac{S_B \cdot h}{3} \quad \rightarrow \quad V = \frac{\pi R^2 \cdot h}{3}$$

Exercícios

21. Se o diâmetro da base de um cone de revolução mede 10 cm e a geratriz 13 cm, determine a área lateral, a área total e o volume desse cone.

22. Num cone equilátero, o diâmetro da base é igual a 8 m. Determine a área total e o volume desse cone.

23. Determine o volume de um cone equilátero cuja área lateral é 18π cm².

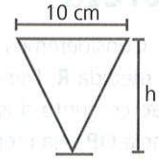
Testes

42. Determine a área total de um cone circular reto de raio da base igual a 2 cm e geratriz 5 cm:
a) 6π cm²
b) 8π cm²
c) 10π cm²
d) 12π cm²
e) 14π cm²

43. Num cone de revolução, a geratriz mede 10 cm e a altura 8 cm. Determine o volume desse cone:
a) 288π cm³
b) 144π cm³
c) 96π cm³
d) 48π cm³
e) 24π cm³

44. Num cone equilátero, a geratriz vale 10 cm. Determine a área total desse cone:
a) 25π cm²
b) 50π cm²
c) 60π cm²
d) 65π cm²
e) 75π cm²

45. (UNIRIO-RJ) Uma tulipa de chope tem a forma cônica, como mostra a figura. Sabendo-se que sua capacidade é de 100π ml, a altura h é igual a:
a) 20 cm
b) 16 cm
c) 12 cm
d) 8 cm
e) 4 cm



46. Calcule a geratriz de um cone equilátero cuja área lateral mede 32π cm²:

a) 8 cm
b) 10 cm
c) 12 cm
d) 16 cm
e) 32 cm

47. (UECE) Um cone circular reto de altura $3\sqrt{2}$ cm tem volume igual a $18\sqrt{2}\,\pi$ cm³. O raio da base desse cone, em centímetros, mede:

a) 2
b) $2\sqrt{2}$
c) 3
d) $3\sqrt{2}$

48. (MATEMÁTICA-SANTO ANDRÉ) Calcular a área lateral do cone cujo volume é 12π m³ e cujo perímetro da base é 6π m.

a) 10π m²
b) 15π m²
c) 18π m²
d) 20π m²
e) n.d.a.

49. (UEPG-PR) A área lateral de um cone de revolução é 600π cm² e sua geratriz tem 25 cm. O raio de sua base é:

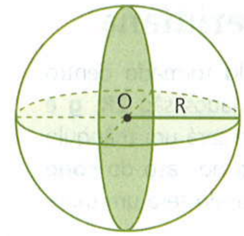
a) 20 cm
b) 25 cm
c) 24 cm
d) 27 cm
e) n.d.a.

50. Um tanque cônico de diâmetro da base 8 m e altura 6 m é usado para armazenamento de óleo diesel. Determine, aproximadamente, a capacidade desse tanque:

a) 50 m³
b) 75 m³
c) 100 m³
d) 125 m³
e) 150 m³

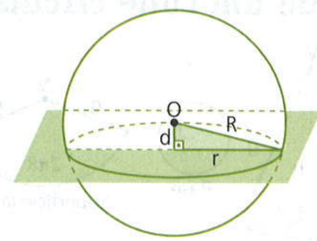
Esfera

Consideremos um ponto **O** e um segmento de reta de medida **R**. Denominamos esfera de centro **O** e raio **R** ao conjunto dos pontos **P** do espaço, tais que a distância **OP** seja menor ou igual a **R**.



Secção plana de uma esfera

Interceptando-se uma esfera por um plano α, a secção plana obtida será sempre um **círculo**. Se a secção passa pelo centro da esfera, temos a **secção meridiana**, denominada também de **círculo máximo**, cujo raio é igual ao da esfera. As demais secções são denominadas de **círculos mínimos**.



d ⟶ distância do centro da esfera ao círculo mínimo
r ⟶ raio do círculo
R ⟶ raio da esfera

Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$R^2 = d^2 + r^2$$

- **Área da superfície esférica**

$$S_E = 4\pi R^2$$

- **Volume da esfera**

$$V_E = \frac{4\pi R^3}{3}$$

Exercícios

24. Encontre a superfície e o volume de uma esfera de diâmetro 8 cm.

25. Um círculo mínimo dista 3 cm do centro da esfera e seu raio mede 4 cm. Calcular a área da superfície esférica e o volume da esfera.

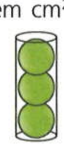
Testes

51. Encontre o volume e a superfície de uma esfera com diametro de 6 cm.
a) 36π cm^3 e 46π cm^2
b) 46π cm^3 e 46π cm^2
c) 46π cm^3 e 36π cm^2
d) 36π cm^3 e 36π cm^2
e) 36π cm^3 e 40π cm^2

52. A área da superfície de uma esfera é 64π cm^2. Determine o volume dessa esfera:
a) 64π cm^3
b) 216π cm^3
c) $\frac{64\pi}{3}$ cm^3
d) $\frac{256\pi}{3}$ cm^3
e) $\frac{216\pi}{3}$ cm^3

53. (FUVEST-SP) Uma superfície esférica de raio 13 cm é cortada por um plano situado a uma distância de 12 cm do centro da superfície esférica, determinando uma circunferência. O raio desta circunferência, em cm, é:
a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

54. (UTFPR) A indústria de bolas de borracha **Cilimbola** quer produzir embalagens cilíndricas para colocar 3 bolas com 3 cm de raio cada, conforme a figura.
A quantidade total de material utilizado para o fabrico da embalagem, incluindo a tampa, em cm^2, será de:



a) 126π
b) 108π
c) 127π
d) 72π
e) 90π

55. (UFOP-MG) Uma casquinha de sorvete é um cone de 10 cm de altura e 4 cm de diâmetro na base. Duas bolas esféricas de sorvete, também de 4 cm de diâmetro, são colocadas na casquinha. Se o sorvete derreter na casquinha:
a) O sorvete encherá completamente a casquinha, sem transbordar.
b) Transbordarão 8π cm^3 de sorvete.
c) Faltarão 8π cm^3 de sorvete para encher completamente a casquinha.
d) Transbordarão 6π cm^3 de sorvete.
e) Faltarão 6π cm^3 de sorvete para encher completamente a casquinha.

56. (UFRGS) Uma panela cilíndrica de 20 cm de diâmetro está completamente cheia de massa para doce, sem exceder a sua altura, que é de 16 cm. O número de doces, em formato de bolinhas de 2 cm de raio, que se pode obter com toda a massa é:
a) 300
b) 250
c) 200
d) 150
e) 100

57. (UFRGS) São fundidas 300 esferas com 20 mm de diâmetro para fabricar cilindros circulares retos com 20 mm de diâmetro e 200 mm de altura. O número de cilindros resultantes é:
a) 2
b) 5
c) 20
d) 25
e) 30

Cálculos

Respostas

Exercício 01: 18

Exercício 02: 10

Exercício 03: 15

Exercício 04: 21

Exercício 05: 2 160°

Exercício 06: a) A = 6; V = 4; b) A = 12; V = 8; c) A = 12; V = 6; d) A = 30; V = 20; e) A = 30; V = 12

Exercício 07: 3 600°

Exercício 08: $S_L = 48\ m^2$; $S_T = 66\ m^2$; $V = 36\ m^3$

Exercício 09: $S_T = 32\sqrt{3}$; $V = 15\ m^3$

Exercício 10: $S_L = 54\ cm^2$; $S_T = 94\ cm^2$; $V = 60\ cm^3$; $d = 5\sqrt{2}$ cm

Exercício 11: $V = 960\ cm^3$

Exercício 12: $S_L = 36\ cm^2$; $S_T = 54\ cm^2$; $V = 27\ cm^3$; $d = 3\sqrt{3}$ cm.

Exercício 13: d = 6 cm

Exercício 14: 5 cm

Exercício 15: 15 cm

Exercício 16: 4 cm

Exercício 17: $S_L = 260\ cm^2$; $S_T = 360\ cm^2$; $V = 400\ cm^3$

Exercício 18: $V = 4\sqrt{3}\ m^3$

Exercício 19: $S_L = 24\pi\ cm^2$; $ST = 32\pi\ cm^2$; $V = 24\pi\ cm^3$

Exercício 20: $S_T = 54\pi\ cm^2$; $V = 54\pi\ cm^3$

Exercício 21: $S_L = 65\pi\ cm^2$; $S_T = 90\pi\ cm^2$; $V = 100\pi\ cm^3$

Exercício 22: $S_T = 48\pi\ cm^2$; $V = \dfrac{64\sqrt{3}\pi}{3}\ cm^3$

Exercício 23: $V = 9\sqrt{3}\pi cm^3$

Exercício 24: $V = \dfrac{256\pi}{3}\ cm^3$; $S = 64\pi\ cm^2$

Exercício 25: $S = 100\pi\ cm^2$; $V = \dfrac{500\pi}{3}\ cm^3$

Gabarito

01) C	02) E	03) E	04) *	05) C	06) B
07) E	08) C	09) A	10) C	11) B	12) E
13) B	14) D	15) A	16) B	17) A	18) C
19) B	20) D	21) E	22) D	23) D	24) A
25) E	26) A	27) E	28) B	29) B	30) D
31) D	32) E	33) A	34) E	35) B	36) B
37) A	38) C	39) D	40) A	41) A	42) E
43) C	44) E	45) C	46) A	47) D	48) B
49) C	50) C	51) D	52) D	53) E	54) A
55) B	56) D	57) C			

*04. 62 (02, 04, 08, 16 e 32)

Desafio

d

Sumário

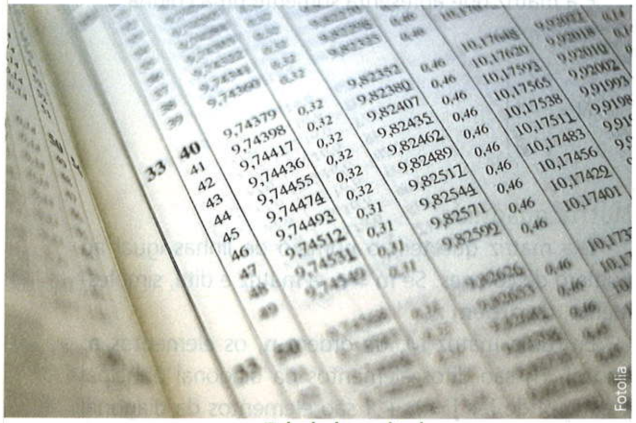
Avaliações

Anotações

Matemática

6 E

Matrizes



Fotolia

Tabela logarítmica

A tabela a seguir representa o número de carros mais vendidos por uma loja nos três primeiros meses de um ano.

	Janeiro	Fevereiro	Março
Gol	50	48	35
Uno	52	51	31
Corsa	43	45	39
Fiesta	38	43	33

Nestas condições, se quisermos determinar a quantidade de veículos **Gol**, vendidos em março, basta olharmos o número que se encontra na primeira linha e terceira coluna; a quantidade de veículos **Corsa**, vendidos em fevereiro, basta olharmos o número que se encontra na terceira linha e segunda coluna.

Tipos de tabelas como essa, representadas em linhas e colunas, são chamadas **matrizes**.

Definição

Denomina-se matriz do tipo (ordem) **m x n** (lê-se **m** por **n**) toda tabela retangular de elementos dispostos em **m** linhas (horizontal) e **n** colunas (vertical), com **m**, **n** $\in$ **N***.

São representadas por letras maiúsculas do alfabeto e seus elementos, em linhas e colunas, escritos entre parênteses ( ), colchetes [ ] ou duas barras paralelas verticais de cada lado || ||.

Exemplos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$ é uma matriz do tipo **3 x 2** (3 por 2), pois tem 3 linhas e 2 colunas.

$$B = \begin{Vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 0 \end{Vmatrix}$$ é uma matriz do tipo **2 x 2** (2 por 2), pois tem 2 linhas e 2 colunas.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & a & 3 \\ x & 5 & 0 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \sqrt{2} \\ 2 & y & 2 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & -3 \end{bmatrix}_{1 \times 4}$$

Representação genérica de uma matriz

Para representar os elementos de uma matriz, utilizamos letras minúsculas acompanhadas de dois índices: o primeiro indica a **linha** em que o elemento se encontra, e o segundo a **coluna**.

$$\underbrace{A_{m \times n} = (a_{ij})_{m \times n}}_{\text{Matriz de ordem m por n.}} \rightarrow \underbrace{a_{ij}}_{\text{Elemento que ocupa a linha i e a coluna j.}}$$

Genericamente, podemos representar a matriz **A** por:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Dizemos, então, que:

- $\mathbf{a_{12}}$ (lê-se: **a** um dois), é o elemento localizado na primeira linha e segunda coluna.
- $\mathbf{a_{23}}$ (lê-se: **a** dois três), é o elemento localizado na segunda linha e terceira coluna.

Exemplo:

01. Escrever a matriz **A** de ordem **2 x 3** tal que $\mathbf{a_{ij} = 2i + j}$.

Resolução:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$a_{ij} = 2i + j$

$a_{11} = 2 . 1 + 1 = 3$

$a_{12} = 2 . 1 + 2 = 4$

$a_{13} = 2 . 1 + 3 = 5$

$a_{21} = 2 . 2 + 1 = 5$

$a_{22} = 2 . 2 + 2 = 6$

$a_{23} = 2 . 2 + 3 = 7$

Portanto, a matriz **A** é representada por:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Exercícios

01. Escreva as matrizes:

a) $A = (a_{ij})_{2x2}$ em que $\mathbf{a_{ij} = 2i + 3j}$.

b) $B = (b_{ij})_{3x2}$ em que $\mathbf{b_{ij} = i^2 - 2j}$.

02. Construa a matriz $C = (c_{ij})_{3x3}$ definida por

$$c_{ij} = \begin{cases} i + j, \text{ se } i > j \\ 2i - j, \text{ se } i < j \\ 1, \text{ se } i = j \end{cases}$$

Classificação de matrizes

Classificamos as matrizes observando certas propriedades que estas apresentam, assim temos:

Matriz-linha

É a matriz que apresenta somente uma linha.

Exemplo:

$M = [7 \quad 1 \quad 0 \quad -2]_{1x4}$

Matriz-coluna

É a matriz que apresenta somente uma coluna.

Exemplo:

$$N = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}_{3\,x\,1}$$

Matriz quadrada

É a matriz que tem o número de linhas igual ao número de colunas. Se **m = n**, a matriz é dita, simplesmente, de **ordem n**.

Em uma matriz **M**, de ordem **n**, os elementos $\mathbf{a_{ij}}$ onde **i = j** são ditos elementos da diagonal principal e os a_{ij} onde **i + j = n + 1** são elementos da diagonal secundária.

Exemplos:

DS

$$M_4 = \begin{pmatrix} a_{14} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}_{4\,x\,4}$$

DP

DS

$$A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 8 & -2 \\ 2 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}_{3\,x\,3}$$

DP

Se **m ≠ n** a matriz é chamada retangular.

Matriz triangular

Uma matriz é chamada de triangular quando todos os elementos acima ou abaixo das diagonais principal ou secundária, são nulos.

Exemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -4 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \\ 4 & 9 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz diagonal

Denomina-se matriz diagonal toda matriz **A** quadrada de **ordem n**, tal que $\mathbf{a_{ij} = 0}$, se $\mathbf{i \neq j}$.

Exemplo:

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Pelo menos um elemento a_{ij} (com i = j) deve ser diferente de zero, senão a matriz torna-se nula.

Matriz nula

É a matriz que apresenta todos os seus elementos iguais a zero.

$$O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$$

Matriz identidade (unidade)

É toda matriz quadrada de **ordem n**, definida por:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ se } i \neq j \\ 1, \text{ se } i = j \end{cases}$$

Para representar uma matriz identidade usamos o símbolo $\mathbf{I_n}$.

Exemplos:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A matriz identidade é um caso particular de matriz diagonal.

Matriz transposta

Seja **A** uma matriz de ordem **m x n**, denominamos **transposta de A**, indicamos $\mathbf{A^t}$ ou $\mathbf{A^T}$, a matriz de ordem **n x m**, obtida a partir de **A** trocando-se ordenadamente linhas por colunas.

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad A^t = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Matriz oposta

Dada uma matriz **A** de ordem **m x n**, chamamos de matriz oposta, indica-se **–A**, quando se trocam todos os sinais dos elementos de **A**.

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad -A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Matriz simétrica

Seja uma matriz **A** de ordem **n**, se $\mathbf{A = A^t}$, a matriz **A** é chamada simétrica.

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ é simétrica,}$$

$$\text{pois } A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Matriz antissimétrica

Seja uma matriz **A** de ordem **n**, se $\mathbf{A = -A^t}$, a matriz **A** é chamada antissimétrica.

Exemplo:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ -4 & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad D^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & -3 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Através desse exemplo você pode observar que $\mathbf{D = -D^t}$, com isso **D** é antissimétrica.

Todos os elementos da diagonal principal de uma matriz antissimétrica são nulos.

Igualdade de matrizes

Duas matrizes serão iguais se forem de mesma ordem e os elementos correspondentes (de mesma linha e mesma coluna) forem iguais.

Exemplos:

Dadas as matrizes:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad N = \begin{pmatrix} 2 & x \\ y & 4 \end{pmatrix}$$

Determine os valores de **x** e **y** de modo que **M = N**.

Como M = N, x = 3 e y = –1.

Exercício

03. Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & x-y \\ x+y & -3 \end{pmatrix}$, se $A = B^t$, determine os valores de **x** e **y**.

Operações com matrizes

Adição

Sejam as matrizes $\mathbf{A}_{mxn}$, $\mathbf{B}_{mxn}$ e $\mathbf{C}_{mxn}$, definimos $\mathbf{C = A + B}$ se, e somente se, $\mathbf{c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}}$, ou seja, somamos os elementos que estão respectivamente nas mesmas posições em ambas as matrizes.

Para encontrarmos C = A – B, subtraímos os elementos.

Exercício

04. Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$, determine:

a) A + B

b) A + B + C

c) A – B

Propriedades da adição

- Comutativa → A + B = B + A
- Associativa → (A + B) + C = A + (B + C)
- Elemento neutro → A + O = A
- Oposta → A + (–A) = O
- $(A + B)^T = A^T + B^T$

Multiplicação de número real por matriz

Seja **k** um número real e **A** uma matriz de ordem **m x n**. O produto **k . A** efetua-se multiplicando todos os elementos de **A** por **k**.

Exemplo:

Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$, encontre 2A + 3B.

$$2A = \begin{pmatrix} 2.1 & 2.2 \\ 2.(-2) & 2.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$3B = \begin{pmatrix} 3.3 & 3.4 \\ 3.5 & 3.(-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 15 & -18 \end{pmatrix}$$

$$2A + 3B = \begin{pmatrix} 11 & 16 \\ 11 & -12 \end{pmatrix}$$

Propriedade: $(KA)^T = K \cdot A^T$

Exercício

05. Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ determine:

a) 3 . B

b) ½ A

c) $2A + 3B^t$

Multiplicação de matrizes

Dadas as matrizes $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times p}$, $\mathbf{B} = (b_{jk})_{p\times n}$ e $\mathbf{C} = (c_{ik})_{m\times n}$, definimos como sendo o produto de **A** por **B** a todos os elementos c_{ik}, obtidos multiplicando-se os elementos da i-ésima linha de **A** pelos correspondentes elementos da j-ésima coluna de **B** adicionando-se os resultados.

Importante saber

O produto entre as matrizes **A** e **B** existe somente se o número de colunas de **A** for igual ao número de linhas de **B**, sendo que a matriz **C** resultante deve ter o mesmo número de linhas de **A** e o mesmo número de colunas de **B**. Assim:

$$A_{m\times p} \quad B_{p\times n} = C_{m\times n}$$

Condição de existência

Ordem do produto

Exercício resolvido

Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, determine o produto **A . B**:

Para efetuarmos a multiplicação, utilizaremos o diagrama abaixo:

$$\begin{array}{c|cc} & \multicolumn{2}{c}{B\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}} \\ \hline A\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 2 \,.\, 2 + 0 \,.\, 1 \\ (-1) \,.\, 2 + 3 \,.\, 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 2 \,.\, (-3) + 0 \,.\, 4 \\ -1(-3) + 3 \,.\, 4 \end{matrix} \end{array}$$

$$A \,.\, B = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & 15 \end{pmatrix}$$

Propriedades da multiplicação

- Associativa → A . (BC) = (A . B) . C
- Distributiva → A . (B + C) = AB + AC
- $(AB)^T = B^T \,.\, A^T$

Na multiplicação de matrizes não são válidas as propriedades: comutativa, do cancelamento e do anulamento do produto. Vejamos:

A multiplicação de matrizes não é comutativa, isto é, existem matrizes **A** e **B**, para os quais **A . B ≠ B . A**.

Na multiplicação de matrizes não é válida a lei do cancelamento, isto é, podemos ter **AB = AC**, mesmo com **B ≠ C** e **A ≠ O**.

Também não é válida a lei do anulamento do produto, isto é, caso exista o produto **A x B = O**, **A** e **B** podem ser diferentes de zero.

Caso ocorra **A . B = B . A**, dizemos que as matrizes comutam.

Exercícios

06. Sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ determine:

a) A . B

b) B . A

07. Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$ determine:

a) A . B

b) A . C

08. Sejam as matrizes $\mathbf{A}_{3x2}$, $\mathbf{B}_{4x1}$ e $\mathbf{C}_{2x4}$. Qual é a ordem da matriz A . C . B?

Testes

01. (UEL-PR) A matriz quadrada $A=(a_{ij})$, de ordem 2, tal que $a_{ij} = \begin{cases} i+j, \text{ para } i \geq j \\ 3j, \text{ para } i < j \end{cases}$ é:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$

02. (UFPR) Seja $\mathbf{M = (a_{ij})}$, uma matriz de ordem **3 x 2**, tal que $a_{ij} = \begin{cases} 2(i-j), \text{ se } i = j \\ 2i+j, \text{ se } i \neq j \end{cases}$. A matriz M é:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 0 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 0 & 5 & 7 \\ 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 0 & 6 & 8 \\ 6 & 0 & 10 \end{pmatrix}$

03. (UFAL) Considere a matriz $\mathbf{A = (a_{ij})_{3x4}}$, na qual $a_{ij} = \begin{cases} i-j, \text{ se } i \leq j \\ i \,.\, j, \text{ se } i > j \end{cases}$. O elemento que pertence à 3.ª linha e à 2.ª coluna da matriz $\mathbf{A^t}$, transposta de **A**, é:

a) 4
b) 2
c) 1
d) –1
e) –2

04. Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ o valor de 2A – 3B é:

a) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 11 & -12 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -12 & 11 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

05. (UFRN) Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, então a matriz $A - B^t$ é:

a) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

06. Sendo $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ e $N = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 0 \\ -3 & 12 & 18 \end{pmatrix}$, determine o valor de $-2M + \frac{1}{3}N$.

a) $\begin{pmatrix} 1 & -7 & -6 \\ -5 & 6 & 6 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} -7 & -6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$

07. (UFRN) A solução da equação matricial

$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ x & x^2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 & x+4 \\ 3x+4 & 2 \end{pmatrix}$ é um número:

a) maior que –1;
b) menor que –1;
c) maior que 1;
d) entre –1 e 1;
e) entre 0 e 3.

08. (PUC) Da equação matricial

$\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & y \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ z & t \end{pmatrix}$ resulta:

a) $x = y = z = t = 1$
b) $x = 1, y = 1, z = 3, t = 2$
c) $x = \frac{3}{2}, y = 2, z = 0, t = -2$
d) $x = 1, y = 2, z = t = 0$
e) $x = 2, y = 0, z = 2, t = 3$

09. (UEL-PR) Uma matriz quadrada **A** diz-se simétrica se $\mathbf{A = A^t}$. Assim, se a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2y \\ x & 0 & z-1 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ é simétrica, então $\mathbf{x + y + z}$ é igual a:

a) –2
b) –1
c) 1
d) 3
e) 5

10. (FGV-SP) Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x & 6 \\ -1 & 2w \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 4 & x+y \\ z+w & 3 \end{pmatrix}$, e sendo $\mathbf{3A = B + C}$, então:

a) $x + y + z + w = 11$
b) $x + y + z + w = 10$
c) $x + y - z - w = 0$
d) $x + y - z - w = 11$
e) $x + y + z + w > 11$

11. Se $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$, então o produto **AB** é:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -8 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

12. (PUC) Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, então **AB – BA** é igual a:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$

13. (Osec-SP) Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$, então, calculando-se $\mathbf{(A + B)^2}$, obtém-se:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 60 & 121 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 25 & 121 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 60 \\ 1 & 121 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

14. (UEL-PR) Sejam **A**, **B** e **C** matrizes de ordens (2 x 3), (3 x 4) e (4 x 1), respectivamente. Se **D = A . B . C**, então a matriz transposta de **D** é de ordem:

a) (2 x 3)
b) (2 x 1)
c) (3 x 1)
d) (1 x 4)
e) (1 x 2)

15. (PUC-PR) Sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, calculando $\mathbf{A^2 + 2A - 11I}$, obtemos:

a) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

16. (UTFPR) Se **A**, **B** e **C** são matrizes do tipo 2 x 3, 3 x 1 e 1 x 4, respectivamente, então o produto **A . B . C**:

a) é matriz do tipo 4 x 2.
b) é matriz do tipo 2 x 4.
c) é matriz do tipo 3 x 4.
d) é matriz do tipo 4 x 3.
e) não é definido.

"A matemática é o alfabeto com que Deus escreveu o mundo."
Galileu Galilei

Determinantes

É um número associado a uma matriz quadrada mediante uma combinação de seus elementos por meio de operações convenientemente definidas.

Para representarmos o determinante de uma matriz quadrada **A** de ordem **n**, utilizamos **det A**, **det (A)** ou **|A|**.

Cálculo de um determinante

Regras práticas

- **Matrizes de ordem 2**

Efetua-se o produto dos elementos da diagonal principal subtraindo-se o produto dos elementos da diagonal secundária.

DS

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} . a_{22} - a_{12} . a_{21}$$

DP

Importante saber

Para matrizes de ordem 1, o valor do determinante será igual ao único elemento da matriz.

$|a_{11}| = a_{11}$

Exemplos:
$|6| = 6$
$|-5| = -5$

Exemplo:
Determine o valor do determinante abaixo:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 . 3 - 2 . 2 = -1$

b) $\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = (-2) . 5 - 4 . (-3) = 2$

- **Matrizes de ordem 3**

"**Regra de Sarrus:** Repete-se as duas primeiras colunas à direita do determinante. Soma-se os produtos dos elementos da diagonal principal e suas paralelas e subtraem-se os produtos dos elementos da diagonal secundária e suas paralelas."

DS e suas paralelas

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

DP e suas paralelas

Também pode-se repetir as duas primeiras linhas abaixo do determinante.

Exemplo:
Determine o valor do determinante abaixo:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} =$

Resolução:

DS e suas paralelas

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{matrix} =$$

DP e suas paralelas

$= 1 . 3 . (-2) + 0 . 1 . (-1) + (-2) . 2 . 2$
$-(-1) . 3 . (-2) - 2 . 1 . 1 - (-2) . 2 . 0$
$= -6 + 0 - 8 - 6 - 2 + 0 = -22$

b) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -2 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \left|\begin{matrix} -1 & 3 & 1 \\ -2 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{matrix}\right|\begin{matrix} -1 & 3 \\ -2 & 5 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right| =$

$-10 - 0 - 2 - 0 - 3 + 12 = -3$

Exercícios

09. Calcule o valor dos determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} =$

b) $\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} =$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} =$

d) $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} =$

10. Determine o valor de **x** de modo que:

a) $\begin{vmatrix} x & 5 \\ x & x \end{vmatrix} = -6$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ x & 2 & -1 \\ 1 & x & x \end{vmatrix} - x^2 = 0$

Propriedades

Casos em que um determinante é nulo

O determinante de uma matriz quadrada é nulo quando:

- Uma de suas filas (linha ou coluna) é nula.

Exemplo:

$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$ (1.ª linha nula)

$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0$ (3.ª coluna nula)

- Possui duas filas paralelas iguais ou proporcionais.

Exemplo:

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -2 \\ 5 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$ (1.ª coluna igual a 3.ª coluna)

$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 9 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$ (2.ª linha é o triplo da 1.ª linha)

- Uma de suas filas é a combinação linear de outras filas paralelas.

Exemplo:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0 \ (C_3 = 3 \,.\, C_1 - C_2)$

$\begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ b & -3 & -2 \\ a+b & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \ (L_3 = L_1 + L_2)$

Casos em que o determinante não se altera

O determinante de uma matriz quadrada não se altera quando:

- Trocamos ordenadamente linhas por colunas. Ou seja, o determinante de uma matriz **A** é igual ao determinante da transposta de **A(A^t)**.

Det A = Det A^t

Exemplo:

Dada a matriz **A**, vamos encontrar a transposta de **A (At)** e os determinantes das duas matrizes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 12$$

$$\det A^t = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 12$$

- Somarmos a uma linha ou coluna de uma matriz quadrada uma outra linha ou coluna, multiplicada por um número qualquer (**Teorema de Jacobi**).

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 7$$

Agora, se fizermos $L_2 = L_2 + 2L_1$ e repetirmos as L_1 e L_3, teremos o mesmo resultado, observe:

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 7$$

Casos em que o determinante se altera

- Um determinante muda de sinal se trocarmos, entre si, as posições de duas filas paralelas.

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 7$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -7$$

- Quando se multiplica ou divide uma fila de um determinante por um número, o novo determinante fica multiplicado ou dividido por esse número.

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 7$$

Agora, multiplicando a 3.ª coluna por 4, teremos:

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & -8 \end{vmatrix} = 28$$

Importante saber

Podemos dividir uma fila de um determinante por um mesmo número, colocando-o em evidência, ou seja, multiplicando o determinante. Assim:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} \leftrightarrow 2 . \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

- Se **A** e **B** são duas matrizes quadradas de mesma ordem, então:

det (A . B) = det A . det B
Teorema de Binet

Exemplo:

Dadas as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcular o det (A . B).

Resolução:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 12 \text{ e}$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 8$$

Portanto:
se det (A . B) = det A . det B
det (A . B) = 12 . 8
det (A . B) = 96

Matriz inversa

Quando o produto entre duas matrizes quadradas de ordem **n** resultar em uma matriz identidade de mesma ordem, diremos que estas matrizes são inversas entre si.

Uma matriz quadrada **A** de ordem **n** é dita inversível (isto é, admite inversa) se, e somente se, **det A ≠ 0**.

Indicamos o produto por $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$, onde $\mathbf{A}^{-1}$ é a matriz inversa de **A**.

Exemplo:

Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, determine a matriz inversa de **A**:

Importante saber

Para matrizes de ordem 2, a matriz inversa pode ser obtida da seguinte forma: (Dado uma matriz **A** de ordem 2)

- Trocam-se os números da diagonal principal;
- Trocam-se os sinais dos números da diagonal secundária;
- Divide-se esta matriz pelo det A.

Exemplo:

Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, obter a inversa de **A**.

Resolução:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} : 1$$

Portanto:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Para fazermos a verificação, basta efetuar o produto:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Se o resultado do produto for a identidade $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, a solução encontrada está correta.

Exercícios

11. Determine a inversa das matrizes a seguir:

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

12. Quais os valores de **m** que tornam a matriz abaixo inversível?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m & -2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

13. Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix}$, então o det (A . B) é igual a:

a) 54
b) 64
c) 74
d) 84
e) 94

14. Se det A = 3, calcule o valor do det $(9 \cdot A^{-1})$, sabendo que A é uma matriz de 2.ª ordem.

Testes

17. Calcule o determinante da matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$:

a) 6
b) 7
c) 8
d) 9
e) 10

18. (UFPA) Se $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, então det (AB) é:

a) –20
b) –10
c) 0
d) 10
e) 20

19. A solução da equação $\begin{vmatrix} x & -x \\ -2 & x \end{vmatrix} = 0$.

a) S = {–2, –0}
b) S = {0, 2}
c) S = {2}
d) S = {0}
e) S = {–2, 2}

20. Sendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, então o det A é:

a) 8
b) –8
c) 0
d) 10
e) –10

21. (PUC-PR) A solução da equação $\begin{vmatrix} 2 & x & 1 \\ x & 9 & 1 \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix} = 0$ é:

a) S = {–2, 2}
b) S = {1, 2, 3}
c) S = {3}
d) S = {0, 3}
e) S = {–3, 3}

22. As matrizes $A = \begin{bmatrix} 7 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & -4 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$:

a) São inversíveis.
b) Não são inversíveis.
c) Possuem determinantes iguais a 4.
d) Possuem determinantes diferentes.
e) Não possuem determinantes.

23. Quais são os valores de **n** para que a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & n^2 & 12 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ seja inversível?

a) $n \neq \pm 7$
b) $n \neq \pm \sqrt{7}$
c) $n \neq \pm 5$
d) $n \neq \pm \sqrt{5}$
e) $n \neq \pm 3$

24. (UFSM-RS) Uma matriz é singular quando não admite inversa. Então $A = \begin{bmatrix} x & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ é matriz singular, se x valer:

a) –1/2
b) 2
c) 1
d) 1/2
e) 0

25. (UFPA) O valor de um determinante é 12. Se dividirmos a 1.ª linha por 6 e multiplicarmos a 3.ª coluna por 4, o novo determinante valerá:

a) 8
b) 18
c) 24
d) 36
e) 48

26. (PUC-PR) Sabendo que **A** é uma matriz quadrada de ordem 3 e que det A = 4, então, det (2 . A) é igual a:

a) 8
b) 4
c) 16
d) 32
e) 64

27. (PUC-PR) A inversa da matriz $A = (a_{ij})_{2x2}$, onde $a_{ij} = i - j + 1$ é a matriz:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
c) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
d) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

28. (Cesgranrio-RJ) A inversa da matriz $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ é:

a) $\begin{pmatrix} 1/4 & 1/3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
b) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$
c) $\begin{pmatrix} -1/4 & 1/3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
d) $\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
e) inexistente.

29. (UFBA) Sendo

$$x = \begin{vmatrix} 12 & 18 & 9 \\ 21 & 17 & 15 \\ 32 & 60 & 14 \end{vmatrix} \text{ e } y = \begin{vmatrix} 12 & 18 & 9 \\ 63 & 51 & 45 \\ 32 & 60 & 14 \end{vmatrix}, \text{ então:}$$

a) $x = y$
b) $x = 3y$
c) $x = 27y$
d) $3x = y$
e) $27x = y$

30. (Mackenzie-SP) Dadas as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \text{ podemos afir-}$$

mar que det (A . B) é:

a) 0
b) –2
c) –1
d) 1
e) 2

"A estupidez é infinitamente mais fascinante do que a inteligência. A inteligência tem seus limites, a estupidez não."

Claude Chabrol, diretor de cinema francês.

Matrizes de ordem n ≥ 3

Regra de Chió

Para resolvermos um determinante pela Regra de Chió, devemos:

- Tomar um elemento do determinante igual a 1.
- Suprimir a linha e a coluna que contém o elemento 1.
- De cada elemento restante subtrair o produto dos elementos suprimidos na linha e na coluna.
- Calcular o determinante da matriz obtida e o seu resultado multiplicar por $(-1)^{i+j}$.

Exemplo:

Calcular o determinante:

$$A = \begin{vmatrix} \boxed{0} & 4 & -3 & -2 \\ \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{2} & \boxed{2} \\ \boxed{3} & 8 & 5 & 5 \\ \boxed{2} & 8 & 4 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 4-2.0 & -3-2.0 & -2-2.0 \\ 8-2.3 & 5-2.3 & 5-2.3 \\ 8-2.2 & 4-2.2 & 6-2.2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 4-0 & -3-0 & -2-0 \\ 8-6 & 5-6 & 5-6 \\ 8-4 & 4-4 & 6-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8$$

Como o número um está na 2.ª linha e 1.ª coluna:

det A = $(-1)^{2+1}$. 8
det A = (–1) . 8
det A = –8

Exercícios

15. Calcule o valor dos determinantes abaixo, usando a Regra de Chió:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} =$

b) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ -3 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -3 & 5 \end{vmatrix} =$

16. Encontre o valor de x na equação

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ x & x^2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Determinantes de matrizes triangulares

Se a matriz é triangular em relação à diagonal principal, o seu determinante será igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-2) . 4 . (-2) = 16$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3 . 4 . (-1) = -12$$

Se a matriz é triangular em relação à diagonal secundária, o determinante será igual ao produto dos elementos da diagonal secundária, multiplicados por $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$, onde **n** é a ordem da matriz.

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-2) \,.\, 4 \,.\, 3 \,.\, (-1)^{\frac{3.(3-1)}{2}} = 24$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 3 \,.\, (-1) \,.\, 3 \,.\, (-2) \,.\, (-1)^{\frac{4(4-1)}{2}} = 18$$

Exercícios

17. (UFRN) O determinante da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 72 & 81 \\ 0 & 2 & 200 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ é igual a:}$$

18. Calcule o valor do determinante abaixo:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Determinante de Vandermonde

Matriz de Vandermonde é uma matriz quadrada formada por potências sucessivas de 0 a n – 1.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & . & . & . & 1 \\ \boxed{a_1 & a_2 & a_3 & . & . & . & a_n} \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & . & . & . & a_n^2 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & . & . & . & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Fila Base

O determinante de Vandermonde é igual ao produto de todas as diferenças possíveis entre um elemento qualquer da linha $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ e todos os anteriores.

$$\det M = (a_2 - a_1) \,.\, (a_3 - a_1) \,.\, (a_3 - a_2) \,...\, (a_n - a_{n-1})$$

Exemplo:

Calcule o valor do determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & 9 & 4 & 16 \\ 8 & 27 & -8 & 64 \end{vmatrix} =$$

$$= (3-2) \,.\, (-2-2) \,.\, (-2-3) \,.\, (4-2) \,.\, (4-3) \,.\, (4-(-2))$$
$$= 1 \,.\, (-4) \,.\, (-5) \,.\, 2 \,.\, 1 \,.\, 6 = 240$$

Exercício

19. Resolva o determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \\ 1 & 4 & 9 & 9 \\ 1 & -8 & 27 & -27 \end{vmatrix} =$$

"O único homem que nunca comete erros é aquele que nunca faz coisa alguma. Não tenha medo de errar, pois você aprenderá a não cometer duas vezes o mesmo erro."

Roosevelt

Testes

31. Determine o valor do determinante abaixo:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

a) 22
b) –11
c) 0
d) 11
e) 22

32. O determinante da matriz **A** representada abaixo é:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 8 & 5 & 5 \\ 2 & 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

a) 6
b) –8
c) 0
d) –6
e) 10

33. Calcule o valor do determinante:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

a) 16
b) –16
c) 32
d) –32
e) 64

34. (Mackenzie-SP) Se $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 3 & X \end{vmatrix} = 0$, então o valor de x é:

a) 0
b) 1
c) –1
d) –0,6
e) 0,6

35. (UFLA-MG) O determinante da matriz $\begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 \\ 0 & b & b^2 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}$ é:

a) 0
b) abc
c) $a^2b^2c^2$
d) a + b + c
e) $a^2 + b^2 + c^2$

36. (UFSCar-SP) Sejam:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Então, det (A . B) é igual a:

a) –36
b) 12
c) 6
d) 36
e) –6

37. (Med. Santos-SP) O determinante de

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} \text{ é:}$$

a) 0
b) 3
c) 6
d) –12
e) –3

38. Encontre o valor do determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}$:

a) 0
b) –1
c) 1
d) –2
e) 2

39. (FAAP-SP) Calculando

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \log 7 & \log 70 & \log 700 \\ (\log 7)^2 & (\log 70)^2 & (\log 700)^2 \end{vmatrix}, \text{ obtemos:}$$

a) 0
b) 1
c) 2
d) 7
e) n.d.a.

40. Seja **k** o valor do determinante abaixo, calcule o valor de $\frac{k}{3}$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \\ 4 & 9 & 16 & 1 \\ 8 & 27 & 64 & -1 \end{vmatrix}$$

a) 30
b) –30
c) 40
d) –40
e) 60

Equações lineares

Denomina-se equação linear a toda equação que pode ser representada na forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b$$

onde:

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ são números reais denominados **coeficientes das incógnitas**;

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ são as incógnitas;

b é o termo independente.

São exemplos de equações lineares:

- $2x + 5y = 10$
- $x - 2y + 3z = 8$

Solução de uma equação linear

Seja a equação linear $2x + y = 8$, dizemos que:

- O par ordenado (3, 2) é uma das soluções da equação, pois $2(3) + 2 = 8$.
- O par ordenado (1, 6) é uma das soluções da equação, pois $2(1) + 6 = 8$.

Dizemos, então, que em toda equação escrita na forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b$$

A solução da equação é a sequência de números reais ou ênupla, que colocados, respectivamente, no lugar das incógnitas $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, tornam a igualdade dada verdadeira.

Sistemas de equações lineares

Denomina-se sistema linear de **m** equações nas **n** incógnitas, todo sistema da forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Com o uso das matrizes, podemos esquematizar o sistema da seguinte forma:

$$M \,.\, X = B$$

M é a matriz dos coeficientes:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}_{(m \times n)}$$

X é a matriz das incógnitas:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}_{(n \times 1)}$$

B é a matriz dos termos independentes:

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix}_{(m \times 1)}$$

Solução de um sistema de equações lineares

Resolver um sistema é encontrar a ênupla de números reais que satisfaçam todas as equações simultaneamente.

Vejamos alguns exemplos:

- **Solução do sistema**

$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x - 2y = -1 \end{cases}$ é o par ordenado (1,2), pois:

$2(1) + 2 = 4$

$3(1) - 2(2) = -1$

- **Solução do sistema**

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 3x - 4y + 5z = 10 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

é o trio ordenado (2, –1, 0), pois:

$2 + 2(-1) - 0 = 0$

$3(2) - 4(-1) + 5(0) = 10$

$2 + (-1) + 0 = 1$

Classificação dos sistemas lineares

São classificados quanto ao número de soluções, da seguinte forma:

Sistema

- Possível e determinado (solução única)
- Possível e indeterminado (infinitas soluções)
- Impossível (não admite solução)

Vejamos alguns exemplos:

Classifique e resolva os sistemas:

a) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x - 2y = -1 \end{cases}$

I. $2x + y = 4$
$y = 4 - 2x$

II. $2x - 2y = -1$
$3x - 2(4 - 2x) = -1$
$3x - 8 + 4x = -1$
$7x = 7$
$x = 1$

Subtituindo em I
$y = 4 - 2 \,.\, 1$
$y = 2$

A solução do sistema é {(1, 2)} e o sistema é possível e determinado (SPD), pois admite solução única.

b) $\begin{cases} 2x + 2y = 8 \\ x + y = 4 \end{cases}$

I. $x + y = 4$
$y = 4 - x$

II. $2x + 2y = 8$
$2x + 2(4 - x) = 8$
$2x + 8 - 2x = 8$
$0 = 0$

O sistema é possível e indeterminado (SPI), pois a afirmação 0 = 0 é verdadeira e indica que o sistema admite infinitas soluções, ou seja, qualquer solução que satisfaça uma equação satisfaz também a outra.

c) $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 1 \end{cases}$

I. $x + y = 4$
$y = 3 - x$

II. $2x + 2y = 1$
$2x + 2(3 - x) = 1$
$2x + 6 - 2x = 1$
$0 = -5$

O sistema é impossível (SI), pois a afirmação 0 = –5 é falsa, e indica que o sistema não tem solução, ou seja, uma solução qualquer que satisfaça uma equação não satisfaz a outra.

Estes sistemas foram resolvidos por métodos já conhecidos anteriormente, o que veremos agora é um método diferente, denominado **Regra de Cramer**.

Regra de Cramer

Para resolvermos um sistema linear pela Regra de Cramer, é necessário que:

- O número de equações seja igual ao número de incógnitas.

$$\boxed{m = n}$$

- O determinante da matriz dos coeficientes seja diferente de zero.

$$\boxed{\Delta = \det M \neq 0}$$

O sistema sempre será possível e determinado, ou seja, terá apenas uma única solução.

Resolução:

Vejamos, agora, o esquema de resolução para um sistema com três equações e três incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

$\Delta \rightarrow$ **Determinante dos coeficientes**

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

$\Delta_x \rightarrow$ **Determinante da incógnita x**

(substitui-se a coluna da variável **x** pela coluna de termos independentes)

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$\Delta_y \rightarrow$ **Determinante da incógnita y**
(substitui-se a coluna da variável **y** pela coluna de termos independentes)

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$\Delta_z \rightarrow$ **Determinante da incógnita z**
(substitui-se a coluna **z** pela coluna de termos independentes)

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Os valores de **x**, **y** e **z** são dados por:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta};\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta};\ z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$$

O conjunto solução será apresentado, obrigatoriamente, na sequência ordenada S = {(x, y, z)}.

Analogamente utilizaremos o mesmo esquema na resolução de sistemas com maior ou menor número de equações.

Exercício

20. Resolva os sistemas abaixo:

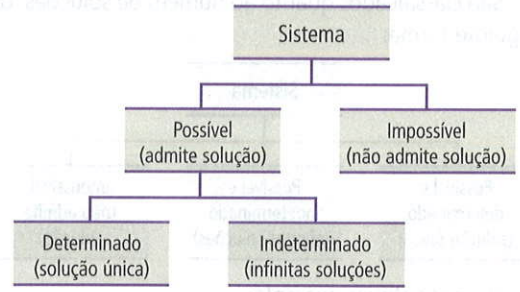
a) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x + y = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x - 3y + 2z = 1 \\ 3x + 4y = -2 \end{cases}$

Discussão de um sistema

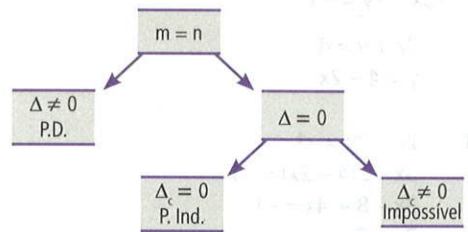
Discutir um sistema de equações lineares consiste em analisar as hipóteses de sua solução, não sendo necessário resolvê-lo.

- Hipóteses de soluções



Regra de Rouché-Capelli

- **1.º Caso (+ importante)**



Δ_c é o determinante característico, utilizando-se os termos independentes (análogo ao Δ_z).

Discutir o sistema:

$\begin{cases} 2x - ay = 3 \\ x + 3y = b \end{cases}$

Temos:

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -a \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & b \end{vmatrix}$

Onde:

$\Delta = 6 + a \quad$ e $\quad \Delta_c = 2b - 3$

Portanto:

$6 + a \neq 0 \quad \therefore \quad a \neq -6$

O sistema será possível e indeterminado se $\Delta = 0$ e $\Delta_c = 0$.

Portanto:

$6 + a = 0 \quad \therefore \quad a = -6$

e $2b - 3 = 0 \qquad b = \dfrac{3}{2}$

O sistema será impossível se $\Delta = 0$ e $\Delta_c \neq 0$

Portanto:

$6 + a = 0 \quad \therefore \quad a = -6$

e $2b - 3 \neq 0 \qquad b \neq \dfrac{3}{2}$

Exercícios

21. Determine o valor de **k** para que o sistema seja possível e determinado:

$$\begin{cases} 2x + ky - z = 2 \\ x - y + 2z = 1 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$$

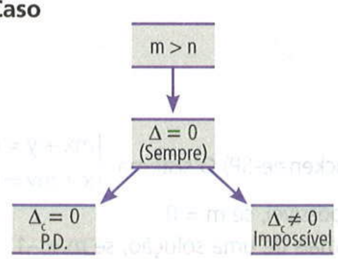
22. Quais os valores reais de **a** e **b** para que o sistema seja possível e indeterminado:

$$\begin{cases} 3x + y - z = 1 \\ 2x - y + 2z = b \\ x - az = 0 \end{cases}$$

23. Encontre o valor de **m** para que o sistema seja impossível:

$$\begin{cases} x + y - 2z = 2 \\ 2x - 3y + z = -1 \\ 3x - 2y - z = m \end{cases}$$

- **2.º Caso**



Discutir o sistema:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + y = 3 \\ 3x - by = 4 \end{cases}$$

Temos:

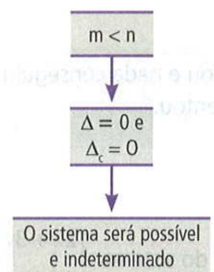
$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -b & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Isto sempre ocorre devido à falta de uma coluna de incógnitas que deve ser preenchida com zeros.

A discussão do sistema reduz-se, portanto, ao Δ_c.

$$\Delta_c = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -b & 4 \end{vmatrix}$$

- **3.º Caso**



O grau de indeterminação é igual ao número de incógnitas arbitrárias (ou variáveis livres).

Discutir o sistema e dar o grau de indeterminação:

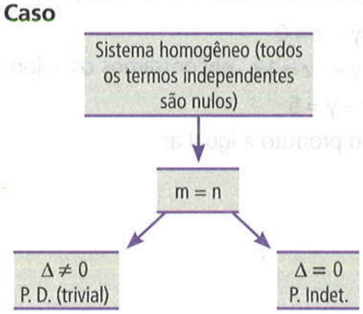
$$\begin{cases} 2x - 3y + 2z = 5 \\ 5x + 2y - z = b \end{cases}$$

Temos:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{e} \quad \Delta_c = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 5 & 2 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Sistema possível e indeterminado com grau de indeterminação igual a 1 (seria a incógnita **z**, por exemplo, cujos valores são arbitrários).

- **4.º Caso**



Exercício

24. (PUC-PR) Os valores de **k**, tais que o sistema homogêneo

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x - ky + z = 0 \\ kx - y - z = 0 \end{cases}$$, são

Admita somente a solução **trivial** (todas as incógnitas têm valor zero).

"Aquele que tentou e nada conseguiu é superior àquele que não tentou."
Bud Wilkinson

Testes

41. A solução do sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ x + y = 1 \end{cases}$ é:

a) S = {(0, 1)}
b) S = {(–3, 4)}
c) S = {(2, 4)}
d) S = {(–3, 2)}
e) S = {(0, 4)}

42. Determine o conjunto solução do sistema:

$$\begin{cases} x + z = 4 \\ y + z = 5 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

a) S = {(–1, 2, 3)}
b) S = {(2, 3, 0)}
c) S = {(1, 2, 3)}
d) S = {(1, 2, 0)}
e) S = {(–2, 1, 3)}

43. Resolvendo o sistema de equações

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 3x - y + 2z = 13 \\ x + z - y = 5 \end{cases}$$, encontramos os valores de **x**, **y** e **z** cujo produto é igual a:

a) 8
b) –8
c) 0
d) 4
e) –4

44. (UEM-PR) Dado o sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 4x - 3y + z = -9 \\ -8x + 6y - 2z = 18 \\ x - 3y + z = 6 \end{cases}$$

Sabe-se que (a, b, 20) é solução do mesmo. Nessas condições, o valor de a + 4b é:

45. (Mackenzie-SP) O sistema é:

$$\begin{cases} x - y + z = 6 \\ 2x + y - z = -3 \\ x + 2y - z = -5 \end{cases}$$

a) possível e determinado, sendo x . y . z = –6;
b) possível e determinado, sendo x . y . z = –4;
c) possível e determinado, sendo x + y + z = 5;
d) possível e indeterminado;
e) impossível.

46. (FGV-SP) O sistema linear abaixo:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 2x - y - z = 4 \end{cases}$$

a) É impossível.
b) Admite apenas uma solução.
c) Admite apenas duas soluções.
d) Admite apenas três soluções.
e) Admite infinitas soluções.

47. (FMU-SP) O valor de **a** para que o sistema $\begin{cases} x + 2y = 18 \\ 3x - ay = 54 \end{cases}$ seja possível e indeterminado é:

a) –6
b) 6
c) 2
d) –2
e) 3/2

48. (Mackenzie-SP) O sistema $\begin{cases} mx + y = 0 \\ x + my = 0 \end{cases}$

a) é impossível, se m = 0.
b) tem mais de uma solução, se m = –1.
c) tem solução única, se m = 1.
d) admite apenas solução nula, qualquer que seja m.
e) admite mais de uma solução, qualquer que seja $m \neq \frac{1}{2}$.

49. Os valores de **p** e **q** que tornam o sistema incompatível (impossível) são:

$$\begin{cases} x - 2y + pz = 2 \\ 2x + y - z = q \\ x + 3y + 3z = 1 \end{cases}$$

a) $p = -4$ e $q \neq 3$
b) $p \neq -4$ e $q = 3$
c) $p = -4$ e $q = 3$
d) $p \neq -4$ e $q \neq 3$
e) $p = q = 3$

50. (UFSC) Determine o valor de **m** para que o sistema a seguir admita infinitas soluções:

$$\begin{cases} mx - 2y - z = 0 \\ x - my - 2z = 0 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$$

51. (UFPR) Para que o sistema $\begin{cases} 2x + 5y - z = 0 \\ x + 10y - 2z = 0 \\ 6x - 15y + mz = 0 \end{cases}$ admita solução única, deve-se ter:

a) $m \neq 1$
b) $m \neq 2$
c) $m \neq -2$
d) $m \neq 3$
e) $m \neq -3$

52. (UFPR) A respeito da solução do seguinte sistema de equações lineares, determine a soma das afirmações verdadeiras:

$$\begin{cases} x + y = a \\ 2x - y = -1 \\ ax - 2y = 4 \end{cases}$$

01) Impossível para $a = -2$
02) Impossível para $a \neq 7$ e $a \neq -2$
04) Indeterminado para $a = -2$
08) Determinado para $a = -2$
16) Possível para $a = -2$ e $a = 7$
32) Determinado apenas para $a = 7$

53. (FGV-SP) O sistema linear nas incógnitas **x** e **y**:

$$\begin{cases} x - 2y = 7 \\ 2x + my = 0 \\ 3x - y = 6 \end{cases}$$

a) É determinado qualquer que seja **m**.
b) É indeterminado para $m = \frac{2}{3}$.
c) É impossível para $m \neq \frac{2}{3}$.
d) É determinado para $m \neq \frac{2}{3}$.
e) É impossível qualquer que seja **m**.

Leitura Complementar

Gente é pra brilhar

Transformemos em Sol a estrela
que está em nós
Quanta riqueza desconhecida há em cada um de nós!

Na saga intelectual do povo grego, há uma fábula que enseja lições preciosas. Os deuses do Olimpo estavam preocupados com a evolução do homem por causa de seu intenso desenvolvimento obtido pelo uso da inteligência. Da forma como o homem aprendia sobre ele mesmo e sobre a natureza, poderia em breve alcançar os deuses imortais.

Então, o tonitruante e todo-poderoso Zeus, senhor dos deuses e do mundo, vociferou: "Vamos reagir! Vamos esconder do homem o seu talento e ele jamais nos alcançará!". Mas onde esconder o talento do homem? Poseidon, deus dos mares, sugeriu que fosse escondido nas profundezas dos oceanos; Apolo, deus da luz, no topo do Himalaia; Demeter, deusa da terra, nas areias movediças do Saara; Hefesto, deus do fogo, nos magmas vulcânicos do Vesúvio. Ares, deus da guerra, sugeriu que o talento do homem fosse escondido nos desfiladeiros das Termópilas.

Impávido e altaneiro, o poderoso Zeus levanta-se do trono e dá o veredicto: "Nada disso! O melhor esconderijo para o talento do homem é no interior dele mesmo. Ele jamais há de procurar o talento que está dentro de si".

Esta fábula enaltece o autoconhecimento: as potencialidades, dons, virtudes, valores que em tantos de nós jazem latentes, escondidos.

Howard Gardner, professor e psicólogo da Universidade de Harvard, em 1987, publicou a teoria das sete inteligências múltiplas. Hoje, já são nove: lógico-matemática, linguístico-verbal, musical, espacial, corpóreo-cinestésica, interpessoal, intrapessoal, naturalista e existencial.

Gardner admite duas premissas, complementares: uma indica que cada tipo de inteligência é concedida como herança biológica; a outra, são as habilidades do ser humano "como um cristal multifacetado e tal qual pode e deve ser polido".

O peso atribuído à genética na formação de uma pessoa talentosa varia entre os neurocientistas e psicólogos: de 30% a 70%. No entanto, é consenso que nossas potencialidades serão desenvolvidas somente com estímulo, determinação, disciplina pessoal e transpiração. No caminho que leva aos píncaros do reconhecimento popular, poucos são os bancos com sombra.

"A gente é para brilhar. Brilhar com brilho eterno", declama o grande poeta soviético moderno Vladimir Maiakóvski (1893-1930). Ele próprio era um gênio do talento linguístico-verbal, mas péssimo nos relacionamentos humanos, na inteligência interpessoal. Era vaidoso, intempestivo, crítico cáustico, alcoólatra. Dizia: "prefiro morrer de vodca a morrer de tédio". Imprevisível, concluiu seu famoso poema A plenos pulmões e suicidou-se com um tiro no peito.

Aqui entre nós, temos como exemplo a poeta paranaense Helena Kolody (1912-2003), intensamente expressiva por seus talentos linguístico-verbais, inter e intrapessoais. Era afável, carismática e abnegada. Da saudosa poeta, destacamos a frase final deste artigo: "Deus dá a todos uma estrela. Uns fazem da estrela um Sol. Outros nem conseguem vê-la".

Disponível em: <www.geometriaanalitica.com.br>
Acesso em: 16 jun. 2010.

Cálculos

Respostas

Exercício 01: a) $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$; b) $B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$

Exercício 02: $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

Exercício 03: $x = 3 \quad y = 2$

Exercício 04: a) $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} -1 & -9 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$

Exercício 05:

a) $\begin{pmatrix} -9 & 15 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1/2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} -7 & 15 \\ 11 & 2 \end{pmatrix}$

Exercício 06: a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 10 & 20 \\ -5 & -10 \end{pmatrix}$

Exercício 07: a) $\begin{pmatrix} -5 & 7 \\ -10 & 14 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} -5 & 7 \\ -10 & 14 \end{pmatrix}$

Exercício 08: 3 x 1

Exercício 09: a) 14; b) 13; c) –21; d) 9

Exercício 10: a) $x' = 3 \qquad x'' = 2$
b) $x' = -4 \qquad x'' = 1$

Exercício 11: a) $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & -4/3 \\ -1 & 5/3 \end{pmatrix}$

Exercício 12: $m \neq -1$

Exercício 13: 54

Exercício 14: 27

Exercício 15: a) –16; b) 52

Exercício 16: $x = 1$

Exercício 17: 6

Exercício 18: 30

Exercício 19: 720

Exercício 20: a) $y = x = 1$; b) $x = -6 \quad y = 3 \quad z = 8$

Exercício 21: $K \neq \frac{4}{3}$

Exercício 22: $a = \frac{-1}{5}$; $b = -1$

Exercício 23: $m \neq 1$

Exercício 24: $k \neq 0$ e $k \neq -1$

Gabarito

01) D	02) C	03) D	04) B	05) B	06) A
07) B	08) A	09) E	10) B	11) B	12) E
13) A	14) E	15) C	16) B	17) B	18) A
19) B	20) B	21) E	22) B	23) B	24) D
25) A	26) D	27) E	28) B	29) D	30) A
31) C	32) B	33) C	34) D	35) B	36) D
37) D	38) E	39) C	40) D	41) B	42) C
43) A	44) 7	45) B	46) E	47) A	48) B
49) A	50) 2	51) D	52) *	53) C	

*52. 26 (02, 08 e 16)