Sumário

Matemática Básica E

Avaliações

Anotações

Matemática Básica

"Eis a Matemática – a criação mais original do engenho humano."

Whitehead

Teoria dos conjuntos

Conjunto

A ideia de conjunto é a mais simples e fundamental das ideias matemáticas, pois a partir dela todos os conceitos matemáticos podem ser representados. Rotineiramente, fala-se num conjunto como um agrupamento de objetos de qualquer natureza, sempre distintos e determinado, chamados de **elementos do conjunto**.

Portanto, se tomarmos um conjunto **A** e um objeto **a**, podemos dizer que:

a pertence a **A** (escreve-se $a \in A$) ou **a** não pertence a **A** (escreve-se $a \notin A$).

Representação

Um conjunto pode ser representado de três formas diferentes:

- Por letras maiúsculas, geralmente do início do nosso alfabeto, colocando-se os elementos entre chaves, sendo que cada elemento apresenta-se sempre separado por vírgula.

Exemplos:

A = {1, 3, 5, 7, 9}
B = {2, 4, 6, 8}
C = {a, e, i, o, u}

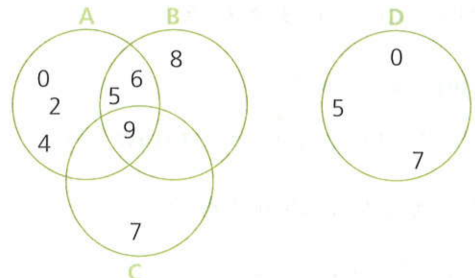
- Pode ser representado através de uma sentença matemática.

Exemplos:

A = {x ∈ R / x é um número par}
B = {x / x é uma vogal}
C = {y / y é um número ímpar}

- Pode ser representado por meio de diagramas, que recebem o nome de **Diagrama de Venn**.

Exemplos:



A = {0, 2, 4, 5, 6, 9}
B = {5, 6, 8, 9}
C = {7, 9}
D = {0, 7, 5}

Classificação

Um conjunto pode ser:

- **Finito:** Quando possui um número finito de elementos.

Exemplos:

A = {1, 2, 3, 4}
B = {a, b, c}

- **Infinito:** Quando possui um número infinito de elementos.

C = {1, 2, 3, 4,...}
D = {x / x > 2}

- **Vazio:** Quando não possui elementos.

Símbolos ∅ ou { }

A_+ = exclui-se os números negativos do conjunto A.
A_- = exclui-se os números positivos do conjunto A.
A^* = exclui-se o zero do conjunto A.

Exemplos:

Se A = {–3, –2, –1, 0, 1, 2, 3}, tem-se:
A_- = {–3, –2, –1, 0}
A_+ = {0, 1, 2, 3}
A^* = {–3, –2, –1, 0, 1, 2, 3}
A^*_+ = {1, 2, 3}
A^*_- = {–3, –2, –1}

Relação de inclusão

Se todos os elementos de um conjunto **A** pertencem a um outro conjunto **B**, dizemos que **A** está contido em **B** (escreve-se **A**$\subset$**B**) ou que **B** contém o conjunto **A** (escreve-se **B**$\supset$**A**).

Dados os conjuntos:

A = {2, 3, 4}
B = {1, 2, 3, 4, 5}
C = {2, 3, 4, 5, 6, 7}
$A \subset B$, $A \subset C$, $B \not\subset C$, $B \supset A$, $C \supset A$

Conjuntos numéricos

Conjunto dos números naturais (N)

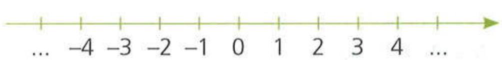
N = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,...}

É um conjunto infinito.

"Deus criou os números naturais; o resto é invenção do homem."
Krönecker.

Conjunto dos números inteiros (Z)

Unindo o conjunto dos números naturais (N) com todos os números negativos inteiros, obtém-se o conjunto dos números inteiros (Z).



Z = {..., – 4, – 3, – 2, – 1, 0, 1, 2, 3, 4, ...}

É um conjunto infinito.

Conjunto dos números racionais (Q)

É o conjunto numérico formado pelos números que podem ser representados na forma de fração.

$$Q = \{x / x = \frac{a}{b}\ \forall\ a \text{ e } b \in Z \text{ e } b \neq 0\}$$

Exemplo:

$$Q = \{-4, -\frac{1}{2}, 0, 1, \frac{3}{2}, ...\}$$

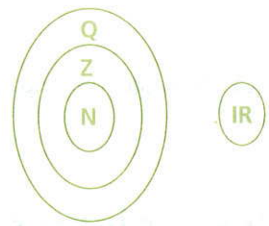
É um conjunto infinito.
Observe que **N** e **Z** são subconjuntos de **Q** e que **N** é subconjunto de **Z**.

Conjunto dos números irracionais (IR = Q')

É o conjunto numérico formado pelos números que **não** podem ser representados na forma de uma razão $\frac{a}{b}$ com **a** e **b** $\in$ Z e b$\neq$0.

Exemplo:

$IR = \{\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi, \sqrt{5}, \sqrt{7}, ...\}$



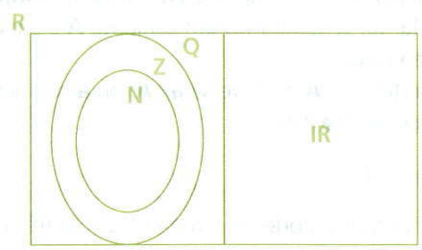
Observe que **N**, **Z** e **Q** não são subconjuntos de **IR**.

Conjunto dos números reais (R)

É um conjunto numérico infinito que faz a união dos números racionais com os números irracionais.

R = Q$\cup$IR

$$R = \{..., -2, -\sqrt{2}, -\frac{1}{3}, 0, 1, \frac{3}{2}, 2, \pi, ...\}$$



R = Q $\cup$ IR

Exercício

01. Assinale **V** (para as sentenças verdadeiras) ou **F** (para as sentenças falsas):

( ) $N \subset Q$	( ) $\frac{2}{3} \in Z$
( ) $Q \supset Z$	( ) $-3 \in Q$
( ) $R \subset Q$	( ) $\sqrt{9} \in IR$
( ) $IR \subset R$	( ) $\sqrt{2} \in IR$
( ) $Q \subset IR$	( ) $\sqrt{4} \in N$

Leitura Complementar

O Um e o Zero

"Eu valho muito pouco, sou sincero, dizia o Um ao Zero. No entanto, quanto vales tu? Na prática és tão vazio e inconcludente quanto na matemática. Ao passo que eu, se me coloco à frente de cinco zeros bem iguais a ti, sabes acaso quanto fico?

Cem mil, meu caro, nem um tico a menos nem um tico a mais. Questão de números. Aliás, é aquilo que sucede como todo ditador que cresce em importância e valor quanto mais são os zeros a segui-lo."

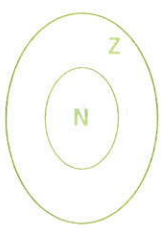
Fonte: Trilussa, poeta italiano. Viveu no tempo de Mussolini.

100 000

Números inteiros

Conjunto dos números inteiros (Z)

Como já vimos:



Z = {..., – 4, – 3, – 2, – 1, 0, 1, 2, 3, 4,...}

Na reta numérica:

... –4 –3 –2 –1 0 1 2 3 4 ...

Módulo de um número inteiro

Módulo ou valor absoluto de um número **x** (escreve-se | x |) é definido colocando-se:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geq 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Ou seja, é o número que faz parte da sua representação sem sinal.

Exemplos:

a) |+ 3| = 3

b) |– 4| = 4

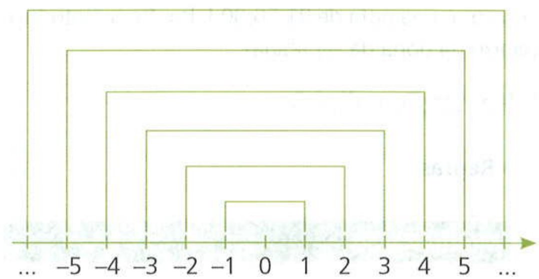
c) |– 2| = 2

d) |+ 2| = 2

e) | 0 | = 0

Números simétricos ou opostos

São dois números de mesmo módulo e de sinais diferentes.



Exemplos:

a) + 5 ⇒ – 5

b) – 3 ⇒ + 3

c) – 7 ⇒ + 7

Operações com números inteiros

Adição e subtração

- Números de sinais iguais, soma-se e dá-se o mesmo sinal.
- Números de sinais diferentes, subtrai-se e dá-se o sinal do maior.

Exercício

02. Calcule as somas:

a) + 3 + 2 =

b) + 7 + 5 =

c) – 3 – 5 =

d) – 4 – 8 =

e) + 3 + 2 – 4 =

f) + 3 – 3 + 6 =

g) – 4 – 4 + 2 =

h) – 5 + 5 – 2 + 2 =

Desafio

Uma pessoa foi a uma sapataria e comprou um par de sapatos por R$ 40,00 e deu uma nota de R$ 50,00 para pagar. Como a dona da sapataria não tinha troco, foi à padaria e trocou a nota de R$ 50,00 por 5 notas de R$ 10,00. Deu R$ 10,00 de troco a quem comprou o par de sapatos e ficou com 4 notas de R$ 10,00. Posteriormente, a dona da padaria foi à sapataria mostrar que a nota de R$ 50,00 era falsa. A dona da sapataria deu uma nota de R$ 50,00 verdadeira, ficando com a que não valia nada. A dona da sapataria perdeu um par de sapatos de R$ 40,00, deu R$ 10,00 de troco e ficou com uma nota de R$ 50,00 falsa. De quanto foi o prejuízo da dona da sapataria?

Multiplicação e divisão

- **Regras**

Multiplicação					
Sinais iguais	+	.	+	=	+
	–	.	–	=	+
Sinais diferentes	+	.	–	=	–
	–	.	+	=	–

Divisão					
Sinais iguais	+	:	+	=	+
	–	:	–	=	+
Sinais diferentes	+	:	–	=	–
	–	:	+	=	–

Resumindo:
Sinais iguais: **+**
Sinais diferentes: **–**

Exercício

03. Resolva:

a) (+3) . (+2) =

b) (+3) . (– 2) =

c) (– 6) : (– 2) =

d) (– 8) : (+4) =

e) (– 3) : (– 3) =

f) (+6) . (– 1) . (– 2) =

g) (– 2) . (– 2) . (+2) =

h) (– 1) . (+2) . (+3) . (– 4) =

Expressões numéricas

- **Regra para as operações**

I. Multiplicação e divisão
II. Adição e subtração

- **Regra para eliminação de parênteses ( ), colchetes [ ] e chaves { }**

I. Parênteses
II. Colchetes
III. Chaves

Exercício

04. Resolva:

a) $32 - (34 + 2) =$

b) $(3 + 2) \,.\, 2 + (8 - 4) : 2 - 1 =$

c) $3 + [8 - 2 \,.\, (3 - 1 + 4)] =$

d) $28 + \{13 - [6 - (4 + 1) + 2] - 1\} =$

Testes

01. Assinale a alternativa falsa:

a) $\sqrt{3} \in IR$.

b) $\sqrt{36} \in N$.

c) $Q \subset R$.

d) $\sqrt{6} \notin IR$.

e) $\sqrt[3]{-8} = -2$

02. Assinale a alternativa correta:

a) $\frac{1}{2} \in N$

b) $-\frac{1}{2} \in Z$

c) $-\frac{1}{2} \in Q$

d) $-\frac{1}{2} \in IR$

e) n.d.a.

03. Assinale a alternativa incorreta:

a) $2 \in N$

b) $0 \in N$

c) $\pi \in R$

d) $R \supset Q$

e) n.d.a.

04. Assinale a alternativa correta:

a) $|-2| = |+2|$

b) $|-2| = \left|-\frac{1}{2}\right|$

c) $|-2| = -2$

d) $\left|-\frac{1}{2}\right| = -2$

e) n.d.a.

05. A temperatura interna de um balcão frigorífico é de – 11°, externamente a temperatura é de 32°. A diferença entre as temperaturas (externa e interna) é:
a) 21°
b) – 21°
c) – 43°
d) 43°
e) 22°

06. A afirmação correta é:
a) $-5 - (-7 + 3) = 9$
b) $3 - (5 + 2) - (-8 + 3) = 1$
c) $9 - (11 - 3) = 13$
d) $-3 - (1 + 3) + 5 = 4$
e) n.d.a.

07. O módulo de $(-2) . (-5) + (-5) . (+3)$ é:
a) 0
b) –5
c) +5
d) +4
e) +7

08. Resolva: $(-3) . (-5) + (-60) : (+12) + (-2) =$
a) –11
b) +11
c) 8
d) 9
e) –9

09. O módulo de $(-4) . (50 : 10) + (-1)$ é:
a) 20
b) –20
c) –21
d) 19
e) 21

10. Resolva: $[(-4) . (+1) . (-4) . (-1)] : (-16)$ é:
a) 1
b) –1
c) 0
d) 2
e) –2

11. O valor absoluto da expressão
$[(-1) . (-3) . (-4)] : [(-3) . (+2)]$ é:
a) 2
b) – 2
c) 3
d) – 3
e) n.d.a.

12. Resolva:
$3 . 8 + \{9 + 2 . [4 . 3 . (5 - 2)]\} . [(12 - 36 : 4) : 3]$
a) 103
b) 105
c) 55
d) 34
e) 62

13. Se $x = 4 + 2 . \{8 + 2 . [1 - 3 . (4 : 2)]\}$, então:
a) $x = 1$
b) $x = -1$
c) $x = 32$
d) $x = 0$
e) $x = -4$

14. O módulo de
$[(-2 + 2) . (-3 + 4 - 5 + 7)] + (-1)$ é:
a) 2
b) 3
c) –3
d) –1
e) 1

15. Resolva: $[(-2) . (-3)] : [(-3) . (+2)]$
a) –1
b) 1
c) 2
d) –2
e) –3

Números primos

Para um número ser considerado primo é necessário ele ter dois divisores distintos: ele mesmo e 1.

$P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19,...\}$

É um conjunto infinito.

Mínimo múltiplo comum (m.m.c.)

O m.m.c. entre **n** números é o menor número divisível pelos **n** números.

Exemplos:

a) m.m.c. de 4, 6, 3 e 12 é:

4 - 6 - 3 - 12	2
2 - 3 - 3 - 6	2
1 - 3 - 3 - 3	3
1 - 1 - 1 - 1	2 . 2 . 3 = 12

b) m.m.c. de 12, 6, 5 e 4 é:

12 - 6 - 5 - 4 |

O m.m.c. é: _______

Frações ordinárias

- **Fração**

É a divisão da unidade em uma ou mais partes iguais.

Notação:

$$\frac{a}{b} \begin{array}{l} \longrightarrow \text{numerador} \\ \longrightarrow \text{denominador} \end{array}$$

$(b \neq 0)$

Exemplos:

$\frac{2}{3}; \frac{5}{2}; \frac{1}{3}; \frac{4}{2}$

Operações

Adição e subtração

Os denominadores devem ser sempre iguais; caso contrário, reduzimos ao mesmo denominador (utilizando-se o m.m.c.); dividimos o novo denominador pelo denominador anterior e multiplicamos pelo numerador anterior; em seguida, adicionamos ou subtraímos os novos numeradores.

Exercícios

05. Resolva:

a) $\frac{3}{2} + \frac{4}{2} = \frac{3+4}{2} =$

b) $\frac{5}{3} + \frac{3}{2} = \frac{10+9}{6} =$

c) $\frac{4}{3} + \frac{5}{2} + \frac{7}{4} =$

d) $3 + \frac{1}{3} + \frac{1}{1} - \frac{8}{5} =$

Multiplicação

Multiplicamos numeradores e denominadores das frações entre si.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

06. Resolva:

a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} =$

b) $\left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) =$

c) $\left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \left(\frac{3}{5}\right) =$

d) $(-2) \cdot \left(1\frac{1}{5}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(\frac{4}{7}\right) =$

Divisão

Multiplica-se a fração dividendo pela fração divisora invertida.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \quad \text{ou} \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

07. Resolva:

a) $\frac{5}{3} : \frac{3}{2} =$

b) $\frac{\frac{5}{2}}{\frac{3}{1}} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{3} =$

c) $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{1}} = \frac{3}{1} \cdot \frac{5}{4} =$

d) $\frac{\frac{7}{3}}{\frac{4}{9}} =$

e) $\frac{2}{3} : \frac{4}{6} =$

Número misto

É a soma de um número natural com uma fração.

Exemplos:

$3\frac{4}{5} = 3 + \frac{4}{5}$

Solução:

- $3\frac{4}{5} = \frac{15+4}{5} = \frac{19}{5}$
- $1\frac{1}{2} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$
- $5\frac{7}{3} = \text{——} = \text{——}$

Regra prática:

$2\frac{1}{3} = \frac{3.2+1}{3} = \frac{7}{3}$

$4\frac{5}{6} = \frac{6.4+5}{6} = \frac{29}{6}$

Exercício

08. Transforme os números mistos em frações:

a) $3\frac{1}{4} =$

b) $4\frac{1}{7} =$

Conversão de números decimais em frações

Coloca-se o número no numerador da fração, sem a vírgula e, no denominador, o número um seguido de tantos zeros quantas forem as casas decimais.

Exercícios

09. Transforme em fração:

a) 0,47 =

b) 1,457 =

c) 0,7 =

d) 0,12 =

e) 4,21 =

10. Resolva as expressões numéricas:

a) $2 + \frac{3}{2} - \frac{1}{5} =$

b) $\frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{5}{8}\right) =$

c) $\left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right) : \left(\frac{1}{5} + 1\frac{1}{2}\right) =$

d) $\left(4\frac{3}{10} + 2\frac{1}{5}\right) : 1\frac{1}{4} =$

Testes

16. Resolva: $\frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{1}{8} =$

a) 0

b) $\frac{5}{3}$

c) $\frac{19}{24}$

d) $-\frac{19}{24}$

e) n.d.a.

17. Resolva: $\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2} - \frac{1}{4} =$

a) $\frac{3}{2}$

b) $-\frac{3}{2}$

c) 0

d) $\frac{5}{3}$

e) n.d.a.

18. Assinale a alternativa falsa:

a) O m.m.c. entre 3, 6, 8 e 12 é 24.

b) O m.m.c. entre 1, 2, 5, 6 e 4 é 60.

c) O número 1 é primo.

d) $2{,}387 = \frac{2\,387}{1000}$

e) n.d.a.

19. Assinale a alternativa verdadeira:
a) Os fatores primos de 1 008 são 1, 2, 3 e 7.

b) $4\frac{1}{5} = \frac{21}{5}$

c) $1,815 = \frac{1815}{10\,000}$

d) $\frac{2\,347}{1000} = 23,47$

e) n.d.a.

20. Dona Valdeti recebe periodicamente a visita de seus filhos: Marco, que a visita a cada 12 dias; Marcelo, a cada 18 dias; e José Luís, a cada 30 dias. No dia de Natal, todos foram visitá-la. Daqui a quantos dias coincidirá a visita dos três filhos?
a) 120
b) 140
c) 150
d) 160
e) 180

21. Assinale a alternativa incorreta:

a) $-\frac{12}{4} = -3$

b) $\frac{7}{0} = 0$

c) $\frac{0}{7} = 0$

d) $\frac{10}{10} = 1$

e) n.d.a.

22. Efetue: $\left[\left(\frac{4}{3}\right) : \left(-\frac{1}{3}\right)\right] . (-1) =$
a) – 4
b) 4
c) 1
d) 3
e) –12

23. Efetue: $\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot (-3) =$

a) $\frac{3}{5}$

b) $\frac{5}{3}$

c) $\frac{3}{2}$

d) $-\frac{2}{3}$

e) n.d.a.

24. Considere as afirmações:
I. $-\frac{2}{5} \in N$

II. $-\frac{2}{5} \in Z$

III. $-\frac{2}{5} \in Q$

Quantas são verdadeiras?
a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) n.d.a.

25. Efetue: $\left(1\frac{2}{3} + 0,4\right) : 1\frac{2}{9} =$

a) $\frac{95}{3}$

b) 5

c) 3

d) $\frac{93}{55}$

e) n.d.a.

26. O valor da expressão $\frac{2}{8} + \frac{1}{8} . \frac{1}{2}$ é:

a) $\frac{3}{16}$

b) $\frac{5}{16}$

c) $\frac{1}{8}$

d) 8
e) n.d.a.

27. O valor da expressão $(-1-1) . \left(-2 + \frac{5}{4}\right) - \frac{1}{2}$ é:
a) –3
b) –2
c) –1
d) $-\frac{1}{2}$

e) 1

"Não há ramo da Matemática, por mais abstrato que seja, que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real."

Lobachevsky.

Potenciação

Dado um número real a qualquer e, um número **n**, inteiro e positivo, define-se potência da base **a** com o expoente **n**, como sendo o produto de **n** fatores iguais a **a**.

Em geral:

Se n > 1 e inteiro, tem-se:

$$a^n = \underbrace{a \, . \, a \, . \, a \, . \, a \ldots a}_{\text{n fatores}}$$

Potenciação é a operação pela qual se eleva um número a qualquer expoente.

Notação:

$a^n = b$

Onde:

a = base
n = expoente
b = potência

Regra de sinais

$(+)^n = +$
$(-)^{par} = +$
$(-)^{ímpar} = -$

Exercício

11. Resolva:

a) $(+\,2)^4 =$

c) $(-\,2)^4 =$

b) $(+\,2)^3 =$

d) $(-\,2)^3 =$

Casos particulares

$a^0 = 1$
$1^n = 1$
$a^1 = a$
$0^n = 0$

Exemplos:

a) $3^0 = 1$; $(-5)^0 = 1$; $\left(-\frac{1}{3}\right)^0 = 1$

b) $1^{10} = 1$; $1^7 = 1$; $1 = 1^{-5} = 1$

c) $2 = 2^1$; $3^1 = 3$; $4^1 = 4$

d) $0^3 = 0$; $0^5 = 0$; $0^7 = 0$

0^0 = não se define.

Propriedades gerais das potências

Sejam **x** e **y** números reais, são válidas as seguintes propriedades:

Propriedade	Representação matemática	Regra
Produto de potências de mesma base.	$a^x \, . \, a^y = a^{x+y}$	Conserva-se a base e somam-se os expoentes.
Divisão de potências de mesma base.	$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$	Conserva-se a base e subtraem-se os expoentes.
Potência de uma potência.	$(a^x)^y = a^{x\,.\,y}$	Conserva-se a base e multiplicam-se os expoentes.
Potência de um produto.	$(a \, . \, b)^x = a^x \, . \, b^x$	Eleva-se cada fator ao expoente comum.
Potência de um quociente.	$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$ $b \neq 0$	Eleva-se o numerador e o denominador ao expoente comum.

Exemplos:

a) $2^2 \, . \, 2^3 = 2^5$

b) $\frac{3^5}{3^2} = 3^3$

c) $(2^3)^2 = 2^6$

d) $(x^2 \, . \, y)^3 = x^6 \, . \, y^3$

e) $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

Exercícios

12. Resolva os exercícios abaixo aplicando as propriedades das potências:

a) $2^4 \, . \, 2^2 =$
b) $x^3 \, . \, x^2 \, . \, x =$
c) $2^5 : 2^2 =$
d) $\frac{3^5}{3^2} =$
e) $\frac{a^7}{a^3} =$
f) $(2^3)^2 =$
g) $(x^2)^5 =$
h) $(2^2 \, . \, 3^3)^2 =$
i) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 =$

Potência de ordem superior

$$a^{m^n} \neq (a^m)^n$$

a^{m^n} = potência de ordem superior
$(a^m)^n$ = potência de potência

13. Calcule:

a) $2^{3^2} =$

b) $2^{2^3} =$

c) $x^{2^5} =$

Potência de expoente negativo

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

14. Resolva as potências:

a) $2^{-3} =$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} =$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} =$

Potências de 10

$$10^n = \underbrace{100\ldots0}_{n\ \text{zeros}}$$

$$10^{-n} = \frac{1}{\underbrace{100\ldots}_{n}} = \underbrace{0{,}000\ldots1}_{n\ \text{casas}}$$

15. Calcule o que se pede:

a) $10^3 =$

b) $2 \cdot 10^2 =$

c) 230 000 =

d) $10^{-3} =$

e) 0,00012 =

Potência de números decimais

16. Resolva as potências abaixo:

a) $(1{,}2)^2 =$

b) $(0{,}13)^2 =$

c) $(0{,}9)^2 =$

d) $(0{,}2)^3 =$

Observe as potências que podem ser lidas da esquerda para a direita ou da direita para esquerda.

$11^2 = 121$
$111^2 = 12321$
$1111^2 = 1234321$
$11111^2 = 123454321$
$111111^2 = 1245654321$
$1111111^2 = 1234567654321$
$11111111^2 = 123456787654321$
$111111111^2 = 12345678987654321$

Expressões numéricas

17. Resolva as expressões abaixo:

a) $\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} =$

b) $\left[\left(1\frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) : \left(2\frac{1}{6} + \frac{20}{12}\right)\right]^2 =$

c) $\frac{2^{-2} + 2^{-3}}{2^{-4} + 1} =$

d) $\frac{4 \cdot 10^4 \cdot 5 \cdot 10^{-9}}{6 \cdot 10^8 \cdot 15 \cdot 10^{-12}} =$

Testes

28. Efetue: $\left[\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) - \left(-\frac{5}{6}\right)\right]^2 : \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} =$

a) $\frac{1}{3}$

b) $\frac{4}{9}$

c) $\frac{2}{3}$

d) $\frac{3}{2}$

e) $\frac{9}{4}$

29. Efetue: $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{4} =$

a) $-\frac{2}{3}$

b) $-\frac{1}{12}$

c) $\frac{7}{2}$

d) $\frac{3}{2}$

e) n.d.a.

30. Efetuar: $\frac{3^{-3} + 5^{-1}}{3^{-2} + 5}$

a) $\frac{16}{345}$

b) $\frac{345}{16}$

c) $\frac{8}{125}$

d) $\frac{125}{8}$

e) n.d.a.

31. Assinale a alternativa falsa:

a) $(2^3)^4 = 2^{12}$

b) $2^{2^4} = 2^8$

c) $\frac{x^4 \cdot y^6}{x^2 y} = x^2 y^5$

d) $\left(\frac{3}{4}\right)^0 - 1 = 0$

e) n.d.a.

32. Assinale a alternativa correta:

a) $0{,}0038 = 3{,}8 \cdot 10^{-4}$

b) $(2^3 \cdot 3^4) \cdot (2^5 \cdot 3^2) = 2^8 \cdot 3^6$

c) $(2^3)^4 \cdot (2^4)^3 = 2^{3^4} \cdot 2^{4^3}$

d) $\frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2} = abc^2$

e) n.d.a.

33. Efetuando-se: $\frac{2 \cdot 10^{-6} \cdot 8 \cdot 10^{-7}}{4 \cdot 10^{-8}}$, obtém-se:

a) $0{,}4 \cdot 10^{-5}$

b) $4 \cdot 10^{21}$

c) $4 \cdot 10^{-5}$

d) $4 \cdot 10^{5}$

e) n.d.a.

34. Efetue: $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 \cdot (-1)^7 \cdot (-3)^6 =$

a) -3^3

b) 3^3

c) -3^2

d) 3^2

e) -9

35. Ache a metade de 2^{22}:

a) 2^{11}

b) 2^{-11}

c) 2^{20}

d) 2^{10}

e) 2^{21}

Radiciação

Dados um número real A e um número inteiro, n > 1; define-se raiz **n-ésima** de A como sendo o número x, cuja potência **n-ésima** é igual a A.

$$\sqrt[n]{A} = x \leftrightarrow x^n = A$$

Onde:

n = é o índice

x = é a raiz

A = é o radicando

$\sqrt{}$ = é o radical

Exemplos:

a) $\sqrt{16} = 4$, pois $4^2 = 16$

b) $\sqrt{25} =$ ...., pois .... = ...

c) $\sqrt[4]{16} =$ ...., pois .... = ...

d) $\sqrt[4]{16} =$ ...., pois .... = ...

$\sqrt[\text{par}]{+} = +$; $\sqrt[\text{par}]{-} = \notin R$

$\sqrt[\text{ímpar}]{+} = +$; $\sqrt[\text{ímpar}]{-} = -$

Exemplos:

a) $\sqrt{16} = 4$

b) $\sqrt{-16} = \notin R$

c) $\sqrt[3]{8} = 2$

d) $\sqrt[3]{-8} = -2$

Propriedades

Propriedade	Exemplo
$\sqrt[n]{A}\,.\,\sqrt[n]{B}=\sqrt[n]{A\,.\,B}$	$\sqrt[3]{2}\,.\,\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{8}=2$
$\dfrac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}=\sqrt[n]{\dfrac{A}{B}}$	$\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{4}}=\sqrt{\dfrac{8}{4}}=\sqrt{2}$
$\left(\sqrt[n]{A}\right)^m=\sqrt[n]{A^m}$	$\left(\sqrt{3}\right)^2=\sqrt{3^2}=\sqrt{9}=3$
$\sqrt[n]{A^n}=A$	$\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=3$
$\sqrt[n.k]{A^{n.m}}=\sqrt[k]{A^m}$	$\sqrt[10]{2^{15}}=\sqrt[10:5]{2^{15:5}}=\sqrt{2^3}$
$\sqrt[n.m]{A^m}=\sqrt[n]{A}$	$\sqrt[10]{10^5}=\sqrt[10:5]{2^{5:5}}=\sqrt{2}$
$\sqrt[n]{A^n\,.\,B}=A\,.\,\sqrt[n]{B}$	$\sqrt{5^2\,.\,3}=5\sqrt{3}$
$\sqrt[n]{\sqrt[m]{A}}=\sqrt[m.n]{A}$	$\sqrt{\sqrt{3}}=\sqrt[4]{3}$
$\sqrt[n]{A^m}=A^{\frac{m}{n}}$	$\sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}}, 25^{\frac{1}{2}}=\sqrt{25}=5$

Exercício

18. Resolva, aplicando as propriedades dos radicais:

a) $\sqrt{2}\,.\,\sqrt{8}=$

b) $\sqrt{2}\,.\,\sqrt{2}=$

c) $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}=$

d) $\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}=$

e) $\left(\sqrt{3}\right)^4=$

f) $\left(\sqrt[3]{3}\right)^3=$

g) $\sqrt[3]{2^3}=$

h) $\sqrt[8]{81}=$

i) $\sqrt[3]{\sqrt{5}}=$

j) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{x}}=$

k) $\sqrt[3]{x^2}=$

l) $\sqrt[7]{a^2}=$

Cálculo de raízes quadradas e simplificação de radicais

Para calcular raízes quadradas ou simplificar radicais, recorremos à fatoração dos radicandos. Veja os exemplos:

$$\sqrt{144}=\sqrt{2^4\,.\,3^2}=\sqrt{2^4}\,.\,\sqrt{3^2}=2^2\,.\,3=12$$

$$\begin{array}{r|l} 144 & 2 \\ 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$\sqrt{450}=\sqrt{2\,.\,5^2\,.\,3^2}=\sqrt{2}\,.\,\sqrt{5^2}\,.\,\sqrt{3^2}=$$
$$=5\,.\,3\,.\,\sqrt{2}=15\sqrt{2}$$

$$\begin{array}{r|l} 450 & 2 \\ 225 & 5 \\ 45 & 5 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Exercício

19. Calcule ou simplifique os radicais:

a) $\sqrt{576}=$

b) $\sqrt{512}=$

c) $4\sqrt{50}=$

d) $3\sqrt[3]{81}=$

Redução de radicais

Dada uma adição ou subtração de radicais, só é possível reduzir a expressão a um único radical se os mesmos forem **semelhantes** (mesmo índice e mesmo radicando).

Exemplos:

a) $\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

b) $\sqrt{12} + 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

c) $\sqrt{12} + \sqrt{27} =$

d) $2\sqrt{18} + \sqrt{8} - 2\sqrt{50} =$

Racionalização de denominadores

Racionalizar um denominador irracional é fazer com que não tenha radical ou expoente fracionário no denominador.

Denominador é um monômio

$$\frac{x}{\sqrt{y}} = \frac{x \,.\, \sqrt{y}}{y}$$

Exemplos:

a) $\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} \,.\, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{25}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$

b) $\frac{2}{\sqrt{3}} =$

c) $\frac{1}{3\sqrt{6}} =$

Denominador é um binômio

Multiplica-se e divide-se pelo conjugado do denominador.

$$\frac{x}{(a+\sqrt{b})} = \frac{x}{(a+\sqrt{b})} \,.\, \frac{(a-\sqrt{b})}{(a-\sqrt{b})}$$

$(a + b) \,.\, (a - b) = a^2 - b^2$

Exemplos:

a) $\frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} \,.\, \frac{(2-\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})} = \frac{2-\sqrt{3}}{4-3} = 2 - \sqrt{3}$

b) $\frac{3}{4-\sqrt{2}} =$

c) $\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} =$

Leitura Complementar

Regra de Pitágoras para calcular o quadrado de um número

Sabemos que para calcular uma potência basta multiplicar a base o n.º de vezes do expoente, ou seja, por exemplo:

$\mathbf{4^2 = 4 \,.\, 4 = 16}$

No entanto, Pitágoras conseguiu arranjar outra regra para calcular potências, baseando-se na soma de números ímpares.

Exemplos:

O primeiro número ímpar é 1, então, $\mathbf{1^2 = 1}$.

Os primeiros dois números ímpares são 1 e 3, então, $\mathbf{2^2 = 1 + 3}$.

Os primeiros três números ímpares são 1, 3 e 5, então, $\mathbf{3^2 = 1 + 3 + 5}$.

Os primeiros quatro números ímpares são 1, 3, 5 e 7, então, $\mathbf{4^2 = 1 + 3 + 5 + 7}$ e assim sucessivamente.

Se pretendêssemos calcular 92 teríamos:

$\mathbf{9^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 = 81}$, isto é, 9^2 é igual à soma dos primeiros 9 números ímpares.

Disponível em: < http://calculu.sites.uol.com.br/Artigos/Curiosidadesmat/regrapitag.htm> Acesso em: 22 abr. 2010.

Testes

36. Assinale a alternativa incorreta:

a) $-2^{-2} + \sqrt{\frac{1}{16}} = 0$

b) $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$

c) $\sqrt[4]{\frac{625}{81}} = \frac{5}{3}$

d) $\sqrt{2^4 \,.\, 3^2} = 2^2 \,.\, 3^0$

37. Assinale a alternativa verdadeira:

a) $\sqrt{2^6} = 2^4$

b) $(\sqrt{8})^2 = 64$

c) $3\sqrt{8} \,.\, 6\sqrt{2} = 72$

d) $\left(\frac{\sqrt{\sqrt[3]{a}}}{\sqrt[3]{a}}\right)^0 = (\sqrt{a})^1$

38. Assinale a alternativa incorreta:

a) $\sqrt[7]{x^6} = x^{6/7}$

b) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}} = \sqrt[8]{x}$

c) $\sqrt{576} = 24$

d) $\sqrt{500} = 5\sqrt{10}$

39. Racionalize $\dfrac{8}{\sqrt{2}}$:

a) $3\sqrt{2}$
b) $4\sqrt{2}$
c) $2\sqrt{2}$
d) $8\sqrt{2}$
e) n.d.a.

40. Racionalizando $\dfrac{2}{3\sqrt{2}}$, obtemos:

a) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

c) $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$

d) $\dfrac{\sqrt{2}}{7}$

41. Racionalize $\dfrac{\sqrt{5}}{3\sqrt{2}}$:

a) $\dfrac{\sqrt{10}}{6}$

b) $\dfrac{\sqrt{10}}{4}$

c) $\dfrac{\sqrt{10}}{3}$

d) $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

42. Racionalize $\dfrac{\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}$:

a) $\dfrac{\sqrt{2}\,(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{4}$

b) $\dfrac{\sqrt{2}\,(3-\sqrt{2})}{11}$

c) $\dfrac{\sqrt{2}\,(3-\sqrt{2})}{7}$

d) $\sqrt{2}\,(3-\sqrt{2})$

e) $\sqrt{2}\,(\sqrt{3}+2)$

43. Racionalizando $\dfrac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$, temos:

a) $\sqrt{5}+\sqrt{3}$
b) $\sqrt{5}\,.\,\sqrt{3}$
c) $\sqrt{2}$
d) $\sqrt{8}$
e) n.d.a.

44. Simplifique a expressão $\dfrac{1}{3+\sqrt{7}} + \dfrac{1}{3-\sqrt{7}}$:

a) $\sqrt{7}+3$
b) $3-\sqrt{7}$
c) 2
d) 3
e) $\sqrt{7}-3$

45. Efetuando $\sqrt{32} - 3\sqrt{2} + \sqrt{8}$, obtém-se:

a) $2\sqrt{2}$
b) $3\sqrt{2}$
c) $\sqrt{2}$
d) $4\sqrt{2}$
e) n.d.a.

46. Determine o valor da soma
$\sqrt{32} + 4\sqrt{8} - \sqrt{50} - 2\sqrt{2}$:

a) $4\sqrt{2}$
b) $5\sqrt{2}$
c) $6\sqrt{2}$
d) $7\sqrt{2}$
e) $8\sqrt{2}$

47. Encontre o valor de $\sqrt{80} + \sqrt{125} + \sqrt{20} - \sqrt{180}$:

a) $3\sqrt{5}$
b) $4\sqrt{5}$
c) $5\sqrt{5}$
d) $6\sqrt{5}$
e) $7\sqrt{5}$

48. Encontre o valor de $\sqrt{128}$:

a) $2\sqrt{2}$
b) $4\sqrt{2}$
c) $6\sqrt{2}$
d) $8\sqrt{2}$
e) $10\sqrt{2}$

49. Determine o valor de $\sqrt{100} + \sqrt{196}$:

a) 14
b) 24
c) 34
d) 44
e) 54

50. Simplifique $\sqrt{2048}$:

a) $36\sqrt{2}$

b) $40\sqrt{2}$

c) $48\sqrt{2}$

d) $16\sqrt{2}$

e) $32\sqrt{2}$

Operações algébricas

Variável

É um símbolo que representa um elemento qualquer em um conjunto dado.

Notação:

x, y, z,...

Expressão algébrica

É um conjunto de letras e números, reunidos por determinadas operações entre seus elementos. Genericamente temos:

$$a_n x^n + a_{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Exemplos:

a) $3a^2x$ - monômio

b) $2x^2y + 3xy$ - binômio

c) $4x^2 + 3x + 2$ - trinômio

d) $3x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ - polinômio

Polinômio é a soma algébrica de monômios.

Valor numérico

É o resultado obtido ao substituirmos letras por valores numéricos e efetuarmos as operações necessárias.

Exemplos:

a) Valor numérico de $x^2 - 5x + 6$ para $x = 2$

V. N. $= 2^2 - 5 . 2 + 6 \rightarrow$ VN $= 0$

b) Valor numérico de $x^2y + 2xy - 3$ para $x = 1$ e $y = -1$

V. N. =

Adição e subtração algébrica

Reduzem-se os termos semelhantes (que possuem a mesma parte literal).

Exercícios

20. Reduza os termos semelhantes:

a) $2xy + 3xy =$

b) $4x^2 + 3x + 6x^2 - x =$

c) $(3x^2 - 2x - 1) - (x^2 + 7x - 1) =$

Multiplicação algébrica

Fazemos o produto de cada termo de uma das expressões por todos os termos da outra expressão. Em seguida, reduzimos os termos semelhantes.

21. Calcule os produtos:

a) $(3x^2) . (-4x^3) =$

b) $(-2xy) . (4x^2y) =$

c) $a (a + b) =$

d) $(x - 2) . (x + 3) =$

e) $(a + 5) . (a + 3) =$

Divisão algébrica

Dividimos os coeficientes e as partes literais de uma expressão pelos coeficientes e partes literais da outra, separadamente: $(a^m : a^n = a^{m-n})$.

22. Resolva as divisões:

a) $(-12x^4y^3) : (-3x^2y) =$

b) $(3x^4 + 2x^3) : (-x^2) =$

c) $(6a^4b^3c^6 + 12a^8b^6c^5) : (3a^2b^2c^4) =$

Produtos notáveis

Quadrado de uma soma

O quadrado da soma de dois termos é igual ao quadrado do primeiro, **mais** duas vezes o produto do primeiro pelo segundo, mais o quadrado do segundo termo.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Quadrado de uma diferença

O quadrado da diferença de dois termos é igual ao quadrado do primeiro, **menos** duas vezes o produto do primeiro pelo segundo, mais o quadrado do segundo termo.

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Produto da soma pela diferença

O produto da soma pela diferença de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo **menos** o quadrado do segundo termo.

$$(a + b) . (a - b) = a^2 - b^2$$

Exercício

23. Resolva:

a) $(x + 2)^2 =$

b) $(x - 3)^2 =$

c) $(x + 4) . (x - 4) =$

d) $(x + 3)^2 + (x + 3) . (x - 3) =$

e) $(x - 6)^2 + (x + 6)^2 =$

Testes

51. Qual o valor numérico da expressão $x^2 - 4x + 4$ para $x = 2$?

a) 1
b) 3
c) 5
d) 0
e) – 1

52. Valor numérico de $x^2y + 2x$ para $x = -1$ e $y = 0$:

a) 2
b) – 2
c) 1
d) – 1
e) n.d.a.

53. O valor numérico de $\dfrac{3x - y}{x - 3y^2}$ para $x = 2$ e $y = -2$ é:

a) $\dfrac{2}{5}$
b) $-\dfrac{4}{5}$
c) 0
d) $\dfrac{5}{2}$
e) n.d.a.

54. Efetue: $(3xy) . (-2xy) =$

a) $6x^2y^2$
b) x^2y^2
c) $-6x^2y^2$
d) -6
e) n.d.a.

55. Efetue: $(-2x) . (-3xy) . (-4xy) =$

a) $-24x^3y$
b) $-24x^3y^2$
c) 24
d) $24x^2y^3$
e) $24x^3y^2$

56. O produto de $(4x + 1) . (x - 3)$ pode ser representado por:

a) $4x^2 - 11x + 3$
b) $4x^2 + 3$
c) $4x^2 - 3$
d) $4x^2 - 11x - 3$
e) n.d.a.

57. Efetue: $(9a^3x) : (-6ax) =$

a) $\dfrac{9}{6}a^2x$
b) $\dfrac{3}{2}a^2x^2$
c) $-\dfrac{3}{2}a^2$
d) $-\dfrac{3}{2}x^2$
e) n.d.a.

58. Assinale a alternativa falsa:

a) $(x - 10)^2 = x^2 - 20x + 100$
b) $(x + 4)^2 = x^2 - 8x + 16$
c) $(x - 7)(x + 7) = x^2 - 49$
d) $(x + 1)^2 = (-x - 1)^2$
e) $(2x + 4)(2x - 4) = 2x^2 - 16$

59. A expressão $(x - y)^2 + (x + y)^2$ equivale a:

a) $8xy$
b) $-8xy$
c) $x^2 + y^2$
d) $2x^2 + 2y^2$
e) $2x^2 - 2y^2$

60. Simplificando a expressão $(2m + n)^2 - 6mn - (m - n)^2$, obtém-se:

a) m^2
b) $2m^2$
c) $3n^2$
d) $3m^2$
e) $6m^2$

61. Efetue: $(\sqrt{3}+\sqrt{2}).(\sqrt{3}-\sqrt{2})=$

a) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$
b) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$
c) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$
d) 0
e) 1

Equações do 1.º grau

São igualdades literais que se verificam somente para determinados valores atribuídos às variáveis. Resolver uma equação consiste em encontrar o valor da variável que satisfaça a igualdade enunciada.

Critérios gerais:

- Se houver fração, obter o m.m.c.
- Se houver parênteses, aplicar a propriedade distributiva da multiplicação.
- Reduzir os termos semelhantes.
- Transportar os elementos.
- Isolar a variável em um dos membros.

Exercícios

24. Resolver as equações:

a) $2x = 14$

b) $3x + 3 = x + 15$

c) $4x + 6 = 5x + 9$

d) $2(x + 3) = 3x + 7(x + 4)$

e) $\frac{x}{5} - \frac{x-4}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1-x}{4}$

25. Paula comprou um rádio que foi pago em 3 prestações. Na 1.ª prestação ela pagou a terça parte do valor do rádio, na 2.ª prestação a quinta parte e na última R$ 35,00. O valor pago pelo rádio foi:

26. Se eu tivesse mais 7 anos estaria com o triplo da idade do meu irmão que tem doze anos. A minha idade é:

Testes

62. O número 2 é raiz da equação:

a) $x + 4 = 7$
b) $x + 2 = 4$
c) $2x - 1 = 0$
d) $x + 6 = 12$
e) n.d.a.

63. Resolva: $2x = -12$

a) $x = 1$
b) $x = 3$
c) $x = -3$
d) $x = 4$
e) $x = -6$

64. A raiz de $\frac{x-2}{3} - \frac{x-3}{2} = 1$ é:

a) -5
b) -1
c) 7
d) 2
e) n.d.a.

65. Resolva: $3x - 2 = \frac{3x}{2} + 2$

a) $\frac{8}{3}$
b) $\frac{3}{8}$
c) $\frac{4}{3}$
d) $\frac{1}{2}$
e) n.d.a.

66. Raiz de $x - \frac{1}{2} = \frac{x-1}{2}$ é:

a) – 1

b) 0

c) 1

d) 2

e) n.d.a.

67. O conjunto verdade de $\frac{2}{3}(x-5) = \frac{1}{5}(x+1)$, é:

a) $\frac{47}{13}$

b) $\frac{53}{13}$

c) $\frac{47}{7}$

d) $\frac{53}{7}$

e) n.d.a.

68. Paulo gastou $\frac{2}{7}$ do que tinha na carteira em livros e $\frac{1}{3}$ em roupas. Ficou com R$ 7,20 no bolso. Quanto tinha Paulo?

a) R$ 18,00

b) R$ 19,50

c) R$ 19,80

d) R$ 18,90

e) n.d.a.

69. Tenho dinheiro em duas gavetas, num total de R$ 1 600,00. Uma das gavetas tem o triplo da quantia da outra. Quantos reais há em cada gaveta?

a) R$ 400,00 e R$ 1 200,00.

b) R$ 500,00 e R$ 1 100,00.

c) R$ 450,00 e R$ 1 150,00.

d) R$ 600,00 e R$ 1 000,00.

70. Em uma caixa cabem 24 garrafas. Se você colocar 1 520 garrafas em caixas como essa, vai obter x caixas completas e uma incompleta, com 8 garrafas. Quantas caixas completas você vai obter?

a) 63 caixas.

b) 64 caixas.

c) 65 caixas.

d) 66 caixas.

e) 67 caixas.

71. A terça parte de um número, menos 10, é igual à sua quarta parte, mais 6. Esse número é:

a) 152

b) 192

c) 182

d) 202

e) 232

72. (Unisinos-RS) É comum encontrarmos, na história da Matemática, problemas que, apesar de sua simplicidade, atravessam os séculos. Um exemplo é o problema conhecido como "Saudações a vós", que aparece no livro *Antologia Grega*, de Metrodorus, século V. Adaptado. Apresenta-se assim: "Bom dia, minhas cem pombas", disse um gavião a um bando de avezinhas que passavam. "Cem pombas não somos nós", disse uma delas. "Para sermos cem é necessário outro tanto de nós, mais metade de nós, mais a quarta parte de nós, e contigo, gavião, cem aves seremos nós". Há no bando:

a) 36 pombas.

b) 40 pombas.

c) 46 pombas.

d) 96 pombas.

e) 101 pombas.

Sistemas de equações do 1.º grau

Quando temos duas ou mais equações, em que a solução de uma deve satisfazer as outras, tem-se um sistema de equações. Existem vários processos de solução, porém, estudaremos os dois mais importantes:

adição e substituição

Substituição

Consiste em escolhermos uma das duas equações e isolarmos uma incógnita, substituindo-a na outra equação:

Exemplos:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$$

$x + y = 4$

$x = 4 - y$

• Substituindo na 2.ª equação

$2x + y = 7$

$2(4 - y) + y = 7$

$8 - 2y + y = 7$

$8 - y = 7$

$y = 1$

Então:

$x = 4 - y$

$x = 4 - 1$

$x = 3$

Exercícios

27. Resolva o sistema:

$$\begin{cases} x - 3y = 0 \\ x + 2y = 10 \end{cases}$$

Adição

Consiste em adicionar os membros das equações de forma que anule uma das incógnitas. Caso não ocorra, devemos preparar as equações.

$$\begin{cases} x + y = 3 & \text{I} \\ 2x - y = 3 & \text{II} \end{cases}$$

$3x \quad = 6$

$x = \dfrac{6}{3}$

$\mathbf{x = 2}$

Volta em I

$x + y = 3$

$2 + y = 3$

$y = 3 - 2$

$\mathbf{y = 1}$

28. Resolva o sistema:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$$

29. Em uma garagem há automóveis e motocicletas, num total de 17 veículos e 58 rodas. O número de motocicletas é:

30. A soma das idades minha e de meu irmão, hoje, é de 12 anos. Daqui a um ano essa soma será o dobro da idade que tenho hoje. Quais são nossas idades?

Testes

73. Resolva: $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 4 \end{cases}$

a) $x = 3; y = -1$
b) $x = -1; y = -3$
c) $x = 1; y = 4$
d) $x = 2; y = -2$
e) n.d.a.

74. Resolva: $\begin{cases} 2x + y = 8 \\ x + y = 16 \end{cases}$

a) $x = 8; y = 2.$
b) $x = 4; y = 2.$
c) $x = 4; y = -2.$
d) $x = -8; y = 24.$
e) n.d.a.

75. Resolva: $\begin{cases} x - 3y = 5 \\ x - 8y = 0 \end{cases}$

a) $x = -8; y = -1.$
b) $x = 8; y = -1.$
c) $x = -8; y = 1.$
d) $x = 8; y = 1.$
e) n.d.a.

76. No sistema: $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ o valor de x é:

a) 0.
b) $x = y$.
c) menor que y.
d) o dobro de y.
e) n.d.a.

77. No sistema: $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - 3y = -4 \end{cases}$ podemos afirmar que:

a) $x = y$.
b) $x = 0$.
c) $x > y$.
d) $x = 4$ e $y = 0$.
e) n.d.a.

78. Encontre $x - y$ em: $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x - y = 10 \end{cases}$

a) 5
b) 4
c) 3
d) 2
e) 1

79. A soma de dois números é 14 e a diferença é 2. Quais são esses números?

a) 9 e 5.
b) 10 e 4.
c) 8 e 6.
d) 11 e 3.

80. Em um quintal há galinhas e coelhos perfazendo o total de 14 cabeças e 38 pés. Calcule o número de galinhas.
a) 6
b) 7
c) 8
d) 9
e) 10

81. Tenho R$ 29,00 em 13 notas. São notas de R$ 1,00 e de R$ 5,00. Quantas notas de R$ 5,00 eu tenho?
a) 8
b) 7
c) 6
d) 5
e) 4

"A Matemática é a mais simples, a mais antiga e a mais perfeita de todas as ciências."
Jacques Hadamard.

Equações do 2.º grau

É toda equação que possui a forma geral $ax^2+bx+c=0$, onde $a \neq 0$; b e $c \in R$.

Exemplos:

$$\left.\begin{array}{l} \text{a) } x^2 - 5x + 6 = 0 \\ \text{b) } x^2 - 4x + 4 = 0 \end{array}\right\} \text{Completas}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{c) } x^2 - 4 = 0 \\ \text{d) } x^2 - 3x = 0 \end{array}\right\} \text{Incompletas}$$

Resolução:

• Incompletas

$\mathbf{ax^2 + bx = 0 \ / \ c = 0}$

Solução:

$x\,(ax + b) = 0$

$x' = 0$

$ax + b = 0$

$ax = -b$

$x'' = \dfrac{-b}{a}$

Exercícios

31. Resolva as equações:

a) $x^2 - 6x = 0$

b) $x^2 + 4x = 0$

c) $3x^2 - 4x = 0$

d) $5x^2 + 6x = 0$

$\mathbf{ax^2 + c = 0 \ \therefore \ b = 0}$

Solução:

$ax^2 = -c$

$x^2 = \dfrac{-c}{a}$

$x = \pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$

32. Resolva as equações:

a) $x^2 - 4 = 0$

b) $x^2 - 16 = 0$

c) $2x^2 - 2 = 0$

d) $3x^2 - 27 = 0$

• Completas

$\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$

Resolve-se através da fórmula de **Baskhara**:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Exemplo:
$x^2 - 7x + 10 = 0$
a = 1
b = –7
c = 10

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4.1.10}}{2.1}$$

$$x = \frac{7 \pm 3}{2} \begin{cases} x' = \dfrac{7+3}{2} \rightarrow x' = 5 \\ x'' = \dfrac{7-3}{2} \rightarrow x'' = 2 \end{cases}$$

33. Resolva:
a) $x^2 - 5x + 6 = 0$
a = b = c =

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

b) $x^2 - 4x + 4 = 0$
a = b = c =

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Discussão das raízes

As raízes são obtidas por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sendo:
$\Delta = b^2 - 4ac$

Tem-se:
$\Delta > 0 \rightarrow x' \neq x'' \in R$
$\Delta = 0 \rightarrow x' = x'' \in R$
$\Delta < 0 \rightarrow \nexists\ x \in R$

Exercícios

34. Analise as equações abaixo quanto às suas raízes.
a) $x^2 - 8x + 16 = 0$

b) $x^2 - 5x + 6 = 0$

c) $x^2 + x + 12 = 0$

35. A equação $3x^2 - 7x + 8 = 0$:
a) possui 2 raízes.
b) possui 1 raiz.
c) possui 3 raízes.
d) possui 4 raízes.
e) não possui raízes.

Propriedades

Dada a equação $ax^2 + bx + c = 0$, demonstra-se que:

- Soma das raízes

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = S$$

- Produto das raízes

$$x_1 . x_2 = \frac{c}{a} = P$$

Supondo **a = 1**, tem-se:

$$\mathbf{x^2 - Sx + P = 0}$$

Exercício

36. Encontre as raízes sem o uso da fórmula geral:

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$

b) $x^2 - 7x + 10 = 0$

c) $x^2 - 4x + 4 = 0$

d) $x^2 - 6x + 9 = 0$

Testes

82. Resolva: $x^2 - 4x + 3 = 0$.

a) $x' = 1$ e $x'' = 2$.
b) $x' = -1$ e $x'' = -2$.
c) $x' = 1$ e $x'' = 3$.
d) $x' = -1$ e $x'' = -3$.
e) n.d.a.

83. Resolva: $x^2 - 10x + 25 = 0$.

a) $x' = 1$ e $x'' = 25$.
b) $x' = 5$ e $x'' = -5$.
c) $x' = x'' = 5$.
d) $x' = 2$ e $x'' = 5$.
e) n.d.a.

84. Na equação $x^2 - 10x + 24 = 0$, a soma e o produto das raízes valem, respectivamente:

a) $\{-10; 24\}$
b) $\{24; 10\}$
c) $\{10; 24\}$
d) $\{10; -24\}$
e) n.d.a.

85. As raízes de $x^2 - 2x - 3 = 0$, são:

a) 3 e -1
b) -3 e 1
c) 1 e 3
d) -1 e -3
e) 2 e 3

86. O valor de m na equação $x^2 - 8x + m = 0$, de modo que essa equação tenha uma raiz real:

a) $m = 16$
b) $m < 16$
c) $m > 16$
d) $m < -16$
e) n.d.a.

87. Resolva: $x^2 - 16x = 0$

a) $\{0; 16\}$
b) $\{16\}$
c) $\{4; -4\}$
d) $\{4; 4\}$
e) n.d.a.

88. Resolva: $x^2 + 3x - 10 = 0$

a) $\{10; -1\}$
b) $\{-5; 2\}$
c) $\{5; -2\}$
d) $\{6; 4\}$
e) n.d.a.

89. Resolva: $16x^2 - 3x = 0$

a) $\{0; 3\}$
b) $\{0; \frac{3}{16}\}$
c) $\{4; 1\}$
d) $\{-1; 4\}$
e) n.d.a.

90. A equação $13x^2 + 2x + 1 = 0$:

a) possui 3 raízes reais.
b) possui 2 raízes reais.
c) possui 1 raiz real.
d) não possui raízes.
e) n.d.a.

91. Resolva: $3x^2 - 83 = 15 + x^2$

a) $\{7\}$
b) $\{-7\}$
c) $\{7; -7\}$
d) $\varnothing$
e) n.d.a.

92. Resolva: $x^2 - 12 = \frac{x^2}{4} + 36$

a) $\{8\}$
b) $\{8; -8\}$
c) $\{-8\}$
d) $\varnothing$
e) n.d.a.

93. Resolva: $x^2 + 9x^2 - 4x = 7x$

a) $\{3, 5\}$
b) $\{0; \frac{10}{11}\}$
c) $\{0; \frac{11}{10}\}$
d) $\{3; \frac{11}{10}\}$
e) n.d.a.

Leitura Complementar

A fórmula de Bhaskara

Há cerca de 4000 anos os matemáticos egípcios e babilônicos já demonstravam interesse pela resolução de equações.

Alguns textos babilônicos dessa época já faziam referências às equações do 2.º grau. Nesses textos, a resolução das equações era representada passo a passo e eram utilizadas palavras e figuras para representar as incógnitas. O uso das letras para essa representação foi introduzida muitos séculos mais tarde.

Por volta do ano 830 d.C., o matemático árabe Al-Khowarizmi (783-850) publicou um livro chamado *Al-Jabr W'al Muqabalah* que trazia explicações minuciosas sobre a resolução de equações. Nesse livro, Al-Khowarizmi resolvia equações do 2.º grau usando áreas de quadrados e retângulos.

Três séculos depois, um matemático hindu chamado Bhaskara (1114-1185) desenvolveu um método algébrico que permitia encontrar a solução de qualquer equação do 2.º grau. Por isso, a fórmula que usamos para resolver equações do 2.º grau é conhecida como fórmula de Bhaskara. Porém, essa fórmula, tal como é conhecida hoje, foi elaborada somente por volta do século XVI, pois foi a partir dessa época que os símbolos começaram a ser introduzidos na Matemática pelo advogado e matemático francês François Viète (1540-1603).

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Fonte: CAVALCANTE, Luiz G. *Mais Matemática*. São Paulo. Saraiva.

Razão

Razão entre dois números é o quociente do primeiro pelo segundo, com o segundo número diferente de zero.

Exemplos:

a) A razão entre a e b é $\frac{a}{b}$

b) A razão entre 2 e 3 é $\frac{2}{3}$

Proporção

Proporção é uma igualdade de duas razões.

Exemplos:

a) $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$

- Representação

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ ou } a:b = c:d$$

Lê-se: **a** está para **b** assim como **c** está para **d**.

Os termos **a** e **d** são chamados extremos da proporção.

Os termos **b** e **c** são chamados meios da proporção.

Propriedade fundamental das proporções

Numa proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios.

Exemplos:

- Verifique se os pares de razões abaixo formam uma proporção:

a) $\frac{4}{8} = \frac{2}{4}$ $\quad 4 . 4 = 8 . 2$

b) $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$ $\quad 2 . 15 = 3 . 10$

c) $\frac{3}{8} = \frac{1}{2}$ $\quad 3 . 2 \neq 8 . 1$

- Determine o valor de x nas proporções:

a) $\frac{x}{5} = \frac{12}{10}$

$20 . x = 5 . 12$

$x = \frac{60}{20}$

$x = 3$

b) $\frac{x}{6} = \frac{x + 3}{15}$

$15x = 6 . (x + 3)$

$15x = 6x + 18$

$15x - 6x = 18$

$9x = 18$

$x = \frac{18}{9}$

$x = 2$

Exercício

37. Encontre o valor de **x** nas proporções abaixo:

a) $\frac{x}{4} = \frac{3x+2}{5}$

b) $\frac{3x+5}{2} = \frac{4x+7}{3}$

c) $\frac{x+1}{2x+6} = \frac{3}{20}$

d) $\frac{3}{4} = \frac{x+3}{4x+5}$

Regra de três

Grandezas diretamente proporcionais (G.D.P.)

Duas grandezas são diretamente proporcionais quando, aumentando uma delas, a outra aumenta na mesma razão da primeira.

Exemplo:

Um veículo que percorre:

– 80 km em 1 hora

– 160 km em 2 horas

– 240 km em 3 horas

Enquanto o tempo aumenta, a distância percorrida também aumenta. Dizemos então que o tempo e a distância são grandezas diretamente proporcionais. (G.D.P.)

Grandezas inversamente proporcionais (G.I.P.)

Duas grandezas são inversamente proporcionais quando, aumentando uma delas, a outra diminui na mesma razão da primeira.

Exemplo:

Um veículo faz um percurso em:

– 1 hora com velocidade de 120 km/h

– 2 horas com velocidade de 60 km/h

– 3 horas com velocidade de 40 km/h

Enquanto o tempo aumenta, a velocidade diminui. Dizemos então que o tempo e a velocidade são grandezas inversamente proporcionais. (G.I.P.)

Regra de três simples

A regra de três simples é um processo prático para resolver problemas que envolvem duas grandezas diretamente ou inversamente proporcionais.

Exemplos:

01. Com 12 kg de trigo podemos fabricar 8 kg de farinha. Para fabricar 24 kg de farinha, quantos quilogramas de trigo serão necessários?

Resolução:

T x F = G.D.P.	Trigo	Farinha
	12	8
	x	24

Aumentando a quantidade de farinha, a quantidade de trigo também aumenta, logo as grandezas são diretamente proporcionais.

Então: $\frac{12}{x} = \frac{8}{24}$

$8 . x = 12 . 24$

$8x = 288$

$x = \frac{288}{8}$

$x = 36$

Resposta: 36 quilos.

02. Quatro pedreiros fazem uma garagem em 72 horas. Quanto tempo levarão 3 pedreiros para fazer a mesma garagem?

Resolução:

P x H = G.I.P.	Pedreiros	Horas
	4	72
	3	x

Diminuindo a quantidade de pedreiros, a quantidade de horas aumenta, logo as grandezas são inversamente proporcionais.

Então: $\frac{3}{4} = \frac{72}{x}$

$3 . x = 4 . 72$

$3x = 288$

$x = \frac{288}{3}$

$x = 96$

Resposta: 96 horas.

Exercício

38. Em um banco, verificou-se que um caixa leva, em média, 9 minutos para atender 4 clientes. Quanto tempo levará esse caixa para atender 28 clientes?

39. Para pintar um barco, 14 pessoas levaram 8 dias. Quantas pessoas, de mesma capacidade de trabalho que as primeiras, são necessárias para pintar o mesmo barco em 7 dias?

Regra de três composta

A regra de três composta é um processo prático para resolver problemas que envolvem mais de duas grandezas diretamente ou inversamente proporcionais.

Exemplo:

Vinte homens fazem um certo trabalho em 6 dias, trabalhando 8 horas por dia. Para fazer o mesmo trabalho, quantos dias levarão 12 homens, trabalhando 5 horas por dia?

Resolução:

Homens	Dias	Horas/dia
20	6	8
12	x	5

H x D = G.I.P. **H / D x D = G.I.P.**

Então: $\frac{6}{x} = \frac{12}{20} \cdot \frac{5}{8}$

$\frac{6}{x} = \frac{60}{160}$

$\frac{6}{x} = \frac{3}{8}$

$3 . x = 6 . 8$

$3 . x = 48$

$x = \frac{48}{3}$

$x = 16$

Resposta: 16 dias.

Exercício

40. Numa fábrica de calçados, trabalham 12 operários que produzem 120 pares de sapatos, em 8 horas de serviço diário. Quantos operários são necessários para produzir 300 pares de sapatos por dia, com 10 horas de trabalho diário?

"Matemática, de modo algum, são fórmulas, assim como música não são notas!"

Jurquim

Porcentagem

Porcentagem é uma razão centesimal representada pelo símbolo % (por cento).

Exemplos:

a) $35\% = \frac{6}{100} = 0{,}35$

b) $6\% = \frac{6}{100} = 0{,}06$

- Problemas

a. Calcular 15% de R$ 120,00

Resolução:

$\frac{15}{100} . 120 = \frac{15 . 120}{100} = 18$

Resposta: R$ 18,00.

b. Numa escola de 600 alunos, 40% são rapazes. Calcule o número de moças?

Resolução:

Se 40% são rapazes, temos 60% de moças.

$\frac{60}{100} . 600 = \frac{60 . 600}{100} = 360$

Resposta: 360 moças.

c. Um carro custava no ano passado R$ 12 800,00. Este ano, o mesmo carro custa R$ 14 336,00. Qual a taxa de porcentagem do aumento?
Resolução:
Aumento:
R$ 14 336,00 – R$ 12 800,00 = R$ 1 536,00

$1536 = 12800 \cdot \frac{x}{100}$ Taxa de aumento em %

$128x = 1536$

$x = \frac{1536}{128}$

$x = 12$

Resposta: Aumento de 12%.

41. Qual é o valor de 23% de 6 500?

42. (MACKENZIE-SP) Sobre uma dívida de R$ 60 000,00 obteve-se um desconto de 10%. Sobre o restante, obteve-se um outro desconto que reduziu a dívida para R$ 43 200,00. O segundo foi de quantos por cento?

a) 10%
b) 15%
c) 20%
d) 25%
e) 30%

Testes

94. (VUNESP) Um secretário gastou 15 dias para desenvolver um certo projeto, trabalhando 7 horas por dia. Se o prazo concedido fosse de 21 dias para realizar o mesmo projeto, poderia ter trabalhado:

a) 2 horas a menos por dia;
b) 2 horas a mais por dia;
c) 3 horas a menos por dia;
d) 3 horas a mais por dia.

95. (PUC-SP) Um motorista de táxi, trabalhando 6 horas por dia durante 10 dias, gasta R$ 1 026,00. Qual será o seu gasto mensal se trabalhar 4 horas por dia?

a) R$ 1 026,00
b) R$ 2 052,00
c) R$ 3 078,00
d) R$ 4 104,00

96. (MACKENZIE-SP) Uma engrenagem de 36 dentes movimenta outra de 48 dentes. Quantas voltas dá a maior, enquanto a menor dá 100 voltas?

a) 133
b) 86
c) 75
d) 65

97. (UFMG) Uma empresa tem 750 empregados e comprou marmitas individuais congeladas suficientes para o almoço deles durante 25 dias. Se essa empresa tivesse mais 500 empregados, a quantidade de marmitas adquiridas seria suficiente para um número de dias igual a:

a) 10
b) 12
c) 15
d) 18

98. (FCMSC-SP) Sabe-se que 4 máquinas operando 4 horas por dia, durante 4 dias, produzem 4 toneladas de certo produto. Quantas toneladas do mesmo produto seriam produzidas por 6 máquinas daquele tipo, operando 6 horas por dia, durante 6 dias?

a) 8
b) 15
c) 10,5
d) 13,5

99. (UNIMEP-SP) Se dois gatos comem dois ratos em dois minutos, para comer 60 ratos em 30 minutos são necessários:

a) 4 gatos.
b) 3 gatos.
c) 2 gatos.
d) 5 gatos.
e) 6 gatos.

100. (PUCCAMP-SP) Operando 12 horas por dia, 20 máquinas produzem 6 000 peças em 6 dias. Com 4 horas a menos de trabalho diário, 15 daquelas máquinas produzirão 4 000 peças em:

a) 8 dias.
b) 9 dias.
c) 9 dias e 6 horas.
d) 8 dias e 12 horas.

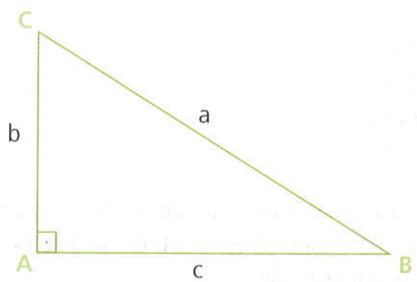
101. (FUVEST-SP) $(10\%)^2$ é igual a:

a) 1%.
b) 10%.
c) 20%.
d) 100%.

102. (FCC-SP) Quanto é 32% de R$ 25 000,00?
a) R$ 5 500,00.
b) R$ 7 500,00.
c) R$ 8 000,00.
d) R$ 10 000,00.

103. (PUC-SP) 15 000 candidatos inscreveram-se na PUC e foram aprovados 9 600. Qual a porcentagem de reprovação?
a) 24
b) 30
c) 32
d) 36
e) n.d.a.

Triângulo retângulo



$\overline{BC} = a =$ hipotenusa
$\overline{AB} = c =$ cateto
$\overline{AC} = b =$ cateto

Teorema de Pitágoras

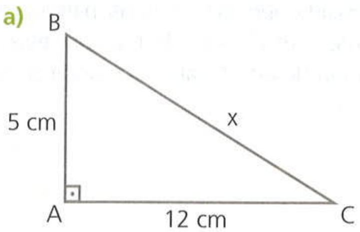
Em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

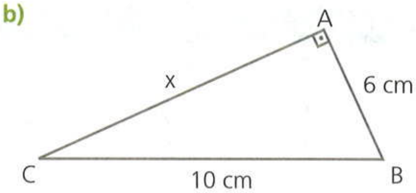
Exercício

43. Determine o valor de x nos triângulos a seguir:

a)

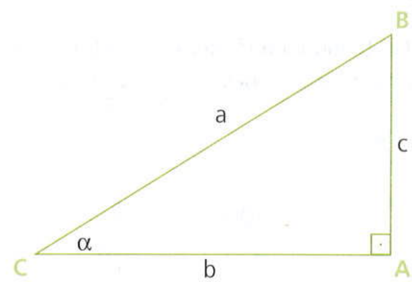


b)



Razões trigonométricas

Considere um triângulo retângulo e um dos seus ângulos internos α (alfa).



- Seno de um ângulo agudo

Num triângulo retângulo, o seno de um ângulo agudo é a razão entre o cateto oposto a esse ângulo e a hipotenusa.

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{\text{cateto oposto a }\alpha}{\text{hipotenusa}} = \text{sen}\,\alpha = \frac{c}{a}$$

- Cosseno de um ângulo agudo

Num triângulo retângulo, o cosseno de um ângulo agudo é a razão entre o cateto adjacente a esse ângulo e a hipotenusa.

$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto adjacente a }\alpha}{\text{hipotenusa}} = \cos\alpha = \frac{b}{a}$$

- Tangente de um ângulo agudo

Num triângulo retângulo, a tangente de um ângulo agudo é a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente.

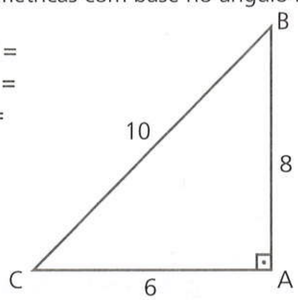
$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \text{tg}\,\alpha = \frac{c}{b}$$

Valores notáveis de 30°, 45° e 60°			
Ângulo	**30°**	**45°**	**60°**
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

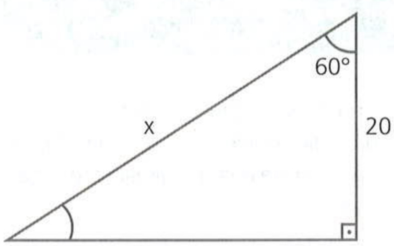
Exercícios

44. No triângulo retângulo, encontre as razões trigonométricas com base no ângulo interno C.

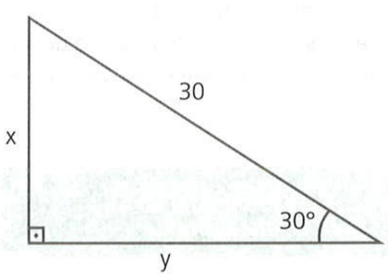
sen $\hat{C}$ =
cos $\hat{C}$ =
tg $\hat{C}$ =



45. Determine o valor de x no triângulo abaixo:



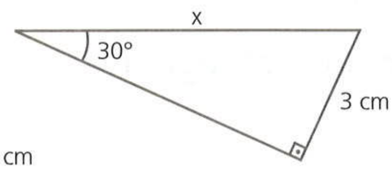
46. Calcule o valor de x e y no triângulo retângulo.



47. Uma pessoa parada a 20 m da base de um edifício avista o topo deste sob um ângulo de 60°. Qual é a altura do edifício? (Adote $\sqrt{3}$ = 1,7)

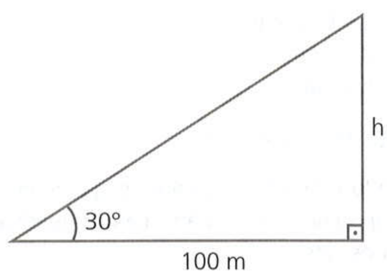
Testes

104. Achar x na figura:



a) 4 cm
b) 8 cm
c) 2 cm
d) 6 cm

105. Um engenheiro, situado a 100 m de uma torre, avista o topo da torre sob um ângulo de 30°. A altura da torre vale:

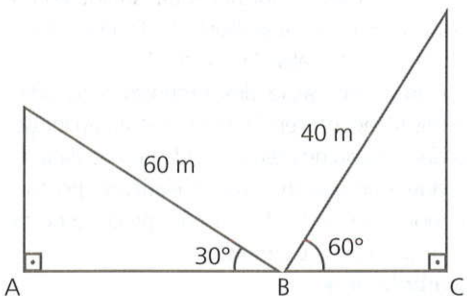


a) $50\sqrt{3}$ m
b) $\frac{100\sqrt{3}}{3}$ m
c) $100\sqrt{3}$ m
d) $\frac{50\sqrt{3}}{3}$ m

106. Uma escada apoiada em uma parede, num ponto distante 4 m do solo, forma com essa parede um ângulo de 60°. Qual é o comprimento da escada em m?

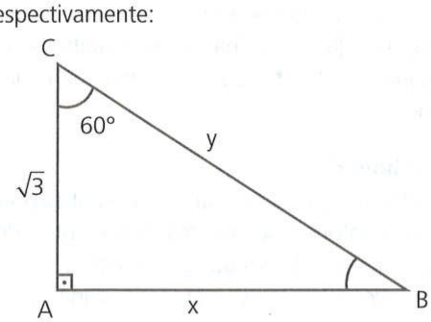
a) 7
b) 10
c) 9
d) 8

107. O valor da distância AC na figura:



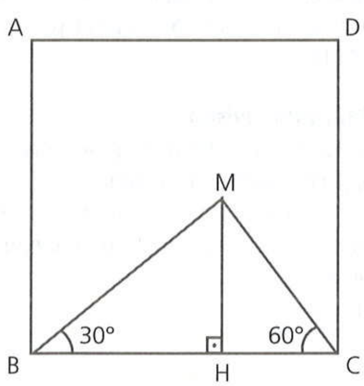
a) $AC = 30\sqrt{3} + 20$
b) $AC = 50\sqrt{3}$
c) $AC = 30\sqrt{3}$
d) $AC = 20$

108. Os valores de x e y, no triângulo abaixo, são respectivamente:



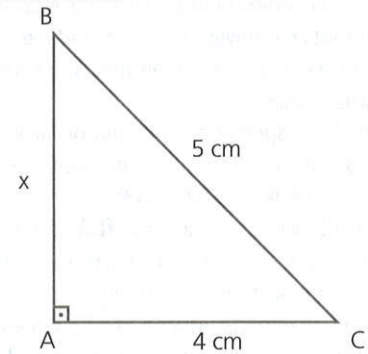
a) 3 e $2\sqrt{3}$
b) $3\sqrt{3}$ e $4\sqrt{3}$
c) $3\sqrt{3}$ e $2\sqrt{3}$
d) 3 e $4\sqrt{3}$

109. (UNEB) Seja o ponto M, no interior do quadrado ABCD, conforme a figura abaixo.



Se MH = $4\sqrt{3}$ cm, o perímetro do quadrado ABCD é em cm:
a) 64
b) 36
c) 48
d) 24
e) 72

110. Encontre x:



a) 2 cm
b) 3 cm
c) 4 cm
d) $\frac{3}{2}$ cm
e) n.d.a.

111. Uma pessoa parada em frente de uma torre, a 30 m desta, avista o topo sob um ângulo de 30°. Qual é a altura da torre? (equação $\sqrt{3} = 1{,}7$)
a) 51 m
b) 43 m
c) 36 m
d) 17 m
e) 70 m

Leitura Complementar

Símbolos e notações matemáticas

Apropriadamente, já se definiu a Matemática como a "rainha e a serva de todas as ciências". E os apanágios de sua majestade são o rigor, a lógica, a harmonia e sua linguagem precisa, universal e sincopada.

Sabemos que os gregos antigos promoveram um grande desenvolvimento à geometria plana e espacial, mas não dispunham de uma notação algébrica ou de simbologia adequadas.

Até o século XVI, toda a expressão matemática se fazia de uma forma excessivamente "verbal ou retórica". Por exemplo, em 1591, Viète para representar a equação quadrática $5A^2 + 9A - 5 = 0$, escrevia em bom latim: *5 in A quad. et 9 in A planu minus 5 aequatur 0.* (5 em A quadrado e 9 em A plano menos 5 é igual a zero).

Além da prolixidade de comunicação entre os matemáticos, havia outras dificuldades, pois utilizavam-se notações diferentes para indicar as mesmas coisas.

O maior responsável por uma notação matemática mais consistente e utilizada até hoje foi Leonhard Euler (1707-1783).

Recordemos as principais: **f(x)** (para indicar função de x); Σ (somatória, provém da letra grega sigma, que corresponde ao nosso S); **i** (unidade imaginária, igual a $\sqrt{-1}$); **e** (base do logaritmo neperiano e igual a 2,7182...); **log x** (para indicar o logaritmo decimal de x); as letras minúsculas **a**, **b**, **c** para indicarem os lados de um triângulo e as letras maiúsculas **A**, **B**, **C** para os ângulos opostos. A letra $\pi = 3,1415...$ que havia sido utilizada por William Jones em 1706, teve o uso consagrado por Euler.

Este nasceu em Basileia, Suíça, e recebeu educação bastante eclética: Matemática, Medicina, Teologia, Física, Astronomia e Línguas Ocidentais e Orientais. Foi aluno de Jean Bernoulli e amigo de seus filhos Nicolaus e Daniel.

Extremamente profícuo, insuperável em produção matemática, Euler escrevia uma média de 800 páginas por ano e publicou mais de 500 livros e artigos. Em plena atividade intelectual, morreu aos 76 anos, sendo que os últimos 17 anos passou em total cegueira (consequência de catarata). Mesmo assim continuou ditando aos seus filhos (eram 13).

Euler se ocupou com praticamente todos os ramos então conhecidos da Matemática, a ponto de merecer do francês François Arago o seguinte comentário: "Euler calculava sem qualquer esforço aparente como os homens respiram e as águias se sustentam no ar".

Em 1748, publica sua principal obra com o título latino: *Introductio in Analysis infinitorum* (**Introdução à Análise Infinita**), considerada um dos marcos mais importantes da Análise como disciplina sistematizada. Destarte, Euler recebeu a alcunha de "Análise Encarnada".

A implementação dos símbolos mais adequados foi acontecendo naturalmente ao longo das décadas ou dos séculos, sob a égide da praticidade e do pragmatismo. É evidente, porém, que pouco se pode afirmar com precisão nesta evolução. Alguns exemplos:

- **Símbolo de +**

O primeiro a empregar o símbolo de + para a adição em expressões aritméticas e algébricas foi o holandês V. Hoecke em 1514. Há historiadores, porém, que creditam tal mérito a Stifel (1486-1567).

Uma explicação razoável é que até então, a adição de dois números, por exemplo 3 + 2, era representada por *3 et 2*. Com o passar dos anos, a conjunção latina ***et*** (que significa e) foi sincopada para "**t**", donde se originou o sinal de **+**.

- **Símbolo de –**

Pode ter sido fruto da evolução abaixo exposta, conforme se observa nos escritos dos matemáticos italianos da Renascença:

1.º) 5 *minus* 2 = 3 (*minus* em latim significa menos).

2.º) 5 ver original 2 = 3 (ver original é abreviatura de *minus*).

3.º) 5 – 2 = 3 (sincopou-se o m da notação $\overline{m}$).

- **Símbolos da multiplicação**

O símbolo de x em a x b para indicar a multiplicação foi proposto pelo inglês William Oughthed (1574-1660). É provável que seja originário de uma alteração do símbolo de +. O ponto em a . b foi introduzido por Leibniz (1646-1716).

- **Símbolos da divisão**

Fibonacci (séc. XII) emprega a notação: $\frac{a}{b}$ ou a/b, já conhecidas dos árabes.

A notação a : b é devida a Leibniz em 1648. Já o inglês J. H. Rahn (1622-1676) emprega a notação $a \div b$.

(...)

Disponível em: <www.geometriaanalitica.com.br> Adaptado. Acesso em: 22 abr. 2010.

Gabarito

01) D	02) C	03) D	04) A	05) D	06) B
07) C	08) C	09) E	10) A	11) A	12) B
13) D	14) E	15) A	16) C	17) A	18) C
19) B	20) E	21) B	22) B	23) A	24) B
25) D	26) B	27) E	28) C	29) B	30) A
31) B	32) B	33) C	34) B	35) E	36) D
37) C	38) D	39) B	40) B	41) A	42) C
43) A	44) D	45) B	46) B	47) C	48) D
49) B	50) E	51) D	52) B	53) B	54) C
55) B	56) D	57) C	58) E	59) D	60) D
61) E	62) B	63) E	64) B	65) A	66) B
67) D	68) D	69) A	70) A	71) B	72) A
73) A	74) D	75) D	76) D	77) A	78) B
79) C	80) D	81) E	82) C	83) C	84) C
85) A	86) A	87) A	88) B	89) B	90) D
91) C	92) B	93) C	94) A	95) B	96) C
97) C	98) D	99) A	100) A	101) A	102) C
103) D	104) D	105) B	106) A	107) D	108) A
109) A	110) B	111) D			

Sumário

Matemática 1 E

Avaliações

Anotações

Matemática

1 E

Conjuntos

Operações

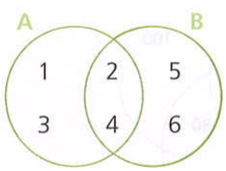
União de conjuntos

A união de dois conjuntos A e B é o conjunto formado por todos os elementos que pertencem ao conjunto A ou que pertencem ao conjunto B.

Indica-se: $A \cup B$ (lê-se: A união B).

Exemplo:

Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{2, 4, 5, 6\}$, determine $A \cup B$:



$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

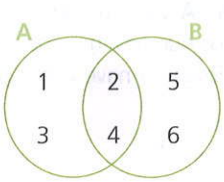
Intersecção de conjuntos

A intersecção de dois conjuntos A e B é o conjunto formado por todos os elementos que pertencem ao conjunto A e que também pertencem ao conjunto B, ou seja, os elementos que são comuns aos dois conjuntos.

Indica-se: $A \cap B$ (lê-se: A inter B).

Exemplo:

Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{2, 4, 5, 6\}$, determine $A \cap B$:



$A \cap B = \{2, 4\}$

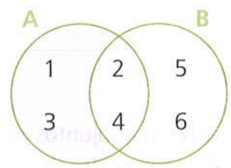
Diferença de conjuntos

A diferença entre dois conjuntos A e B é o conjunto formado por todos os elementos que pertencem ao conjunto A, mas que não pertencem ao conjunto B, ou seja, exclui-se de A o conjunto $A \cap B$.

Indica-se: $A - B$ (lê-se: A menos B).

Exemplo:

Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{2, 4, 5, 6\}$, determine $A - B$:



$A - B = \{1, 3\}$

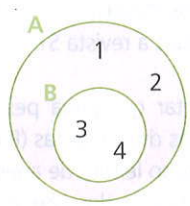
Importante saber

Se $B \subset A$, a diferença entre os conjuntos A e B denomina-se complementar de B em relação ao A.

Indica-se: $A - B = C_A B$

Exemplo:

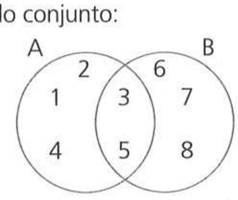
Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{3, 4\}$, determine $C_A B$:



$\mathbf{A - B = C_A B = \{1, 2\}}$

Exercícios

01. Sendo dado o diagrama abaixo, escreva os elementos do conjunto:



a) $A =$

b) $B =$

c) $A \cap B =$

d) $A \cup B =$

e) $A - B =$

f) $B - A =$

02. Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ e $C = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$, determine:

a) $A \cap B$
b) $A \cap C$
c) A∩BÇ∩C
d) $A - B$
e) $B - A$
f) $(A \cup B) - C$
g) $(A \cup B) - (B \cap C)$

"Como pode a Matemática, sendo produto do pensamento humano, independente da experiência, se adaptar tão admiravelmente aos objetos da realidade?"

Albert Einstein

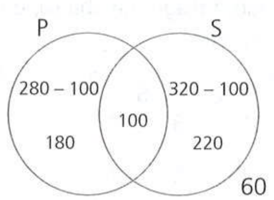
Exercícios resolvidos

Para resolvermos problemas com conjuntos devemos fazer a distribuição dos elementos através da intersecção que possuir mais conjuntos. Veja o problema seguinte:

01. Numa pesquisa de mercado, sobre a preferência entre duas revistas P e S, verificou-se que, das pessoas consultadas, 280 liam a revista P; 320 liam a revista S; 100 liam as duas revistas (P e S) e 60 não liam nenhuma das duas revistas.
Pergunta-se:
a) Quantas pessoas foram consultadas?
b) Quantas pessoas leem apenas a revista S?

Primeiramente, devemos alertar que uma pessoa que é computada como leitora das duas revistas (P e S no caso) também é computada como leitora de apenas uma delas. Com isso devemos retirá-las dos conjuntos para não repetir a contagem de um elemento, como ilustramos abaixo:

Resolução:



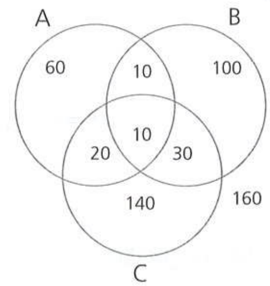
Portanto, temos:
a) $180 + 100 + 220 + 60 = 560$ pessoas.
b) 220 pessoas.

02. (UFLA-MG) Numa comunidade são consumidos os tipos de leite A, B e C. Feita uma pesquisa de mercado sobre o consumo desses produtos, foram colhidos os resultados:

Leite	Número de consumidores
A	100
B	150
C	200
A e B	20
B e C	40
A e C	30
A, B e C	10
Nenhum dos três	160

Determine quantas pessoas:
a) foram consultadas;
b) consomem apenas o leite tipo A;
c) não consomem o leite tipo B.

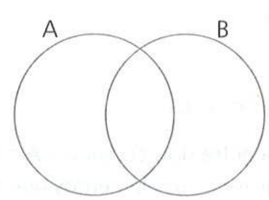
Resolução:



a) $60 + 10 + 100 + 10 + 20 + 30 + 140 + 160 = 530$
b) 60
c) $60 + 20 + 140 + 160 = 380$

Exercícios

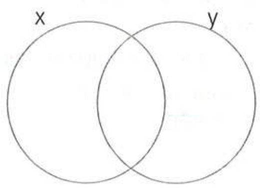
03. Em uma sala de 40 alunos, foram acessados apenas dois portais na internet para que eles pudessem conversar em salas de bate-papos. Sendo que 30 alunos navegam em **A** e 20 navegam em **B**, calcule o número de alunos que navegam nos dois *sites*, sabendo-se que todo aluno navega em pelo menos um dos dois *sites*.

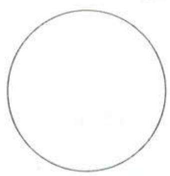


04. (UFSC) Feita uma pesquisa sobre o consumo de 2 artigos x e y, constataram-se os seguintes resultados:

Artigo	Número de consumidores
x	50
y	70
x e y	20
nenhum	10

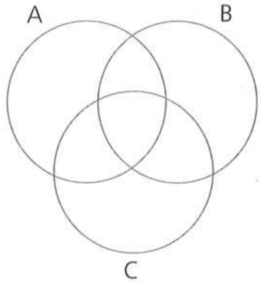
Calcule o número de pessoas consultadas.

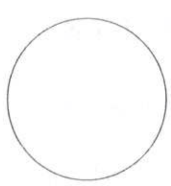




05. (FGV-SP) Numa pesquisa de mercado, foram entrevistadas várias pessoas acerca de suas preferências em relação a 3 produtos: A, B e C. Os resultados da pesquisa indicaram que:

210 pessoas compram o produto A.
210 pessoas compram o produto B.
250 pessoas compram o produto C.
20 pessoas compram os 3 produtos.
100 pessoas não compram nenhum dos 3 produtos.
60 pessoas compram os produtos A e B.
70 pessoas compram os produtos A e C.
50 pessoas compram os produtos B e C.





Calcule o número de pessoas consultadas:

Testes

Dados os conjuntos A = {1, 2, 5, 6}, B = {1, 3, 5, 7} e C = {2, 5, 7}, responda as questões de 01 a 04:

01. Determine A∩B:
a) A∩B = {1, 2, 3, 5, 6, 7}
b) A∩ B = {1, 5}
c) A∩B = {1, 5, 7}
d) A∩B = ∅
e) A∩B = {2, 3}

02. Determine A∩B∩C:
a) A∩B∩C = {1, 5}
b) A∩B∩C = {5, 7}
c) A∩B∩C = {5}
d) A∩B∩C = {1}
e) A∩B∩C = ∅

03. Determine (A∪B) – C:
a) (A∪B) – C = {1, 3, 6}
b) (A∪B) – C = {3, 6}
c) (A∪B) – C = {1, 2, 6}
d) (A∪B) – C = {1, 3, 6, 7}
e) (A∪B) – C = ∅

04. Determine (A∩B) – (A∩C):
a) (A∩B) – (A∩C) = {1, 2}
b) (A∩B) – (A∩C) = {2}
c) (A∩B) – (A∩C) = {1, 2, 5}
d) (A∩B) – (A∩C) = {1}
e) (A∩B) – (A∩C) = ∅

05. (PUC-RS) Se A, B e A∩B são conjuntos com 90, 50 e 30 elementos, respectivamente, então o número de elementos do conjunto A∪B é:
a) 10
b) 70
c) 110
d) 85
e) 170

06. (Unifap) O dono de um canil vacinou todos os seus cães, sendo que 80% contra parvovirose e 60% contra cinomose. O percentual de animais que foram vacinados contra as duas doenças é de:
a) 14%
b) 22%
c) 40%
d) 68%
e) 70%

07. (FCC-BA) Consultadas 500 pessoas sobre as emissoras de TV a que habitualmente assistem, obteve-se o resultado seguinte: 280 pessoas assistem ao canal **A**, 250 assistem ao canal **B** e 70 assistem a outros canais distintos de **A** e **B**. O número de pessoas que assistem ao **A** e não assistem ao **B** é:

a) 180
b) 200
c) 210
d) 150
e) 30

08. (PUCCamp-SP) Numa comunidade constituída de 1 800 pessoas, há três programas de TV favoritos: esporte (E), novela (N) e humorismo (H). A tabela a seguir indica quantas pessoas assistem a esses programas:

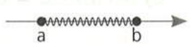
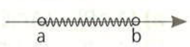
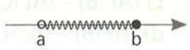
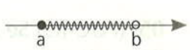
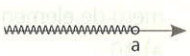
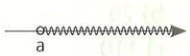
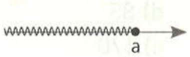
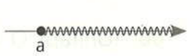
Programas	Número de telespectadores
E	400
N	1220
H	1080
E e N	220
N e H	800
E e H	180
E, N e H	100

Através desses dados, verifica-se que o número de pessoas da comunidade que não assistem a qualquer dos três programas é:

a) 100
b) 200
c) 900
d) Os dados do problema estão incorretos.
e) 300

Intervalos

Denominamos intervalo todo subconjunto de R. A classificação pode ser verificada na tabela a seguir.

Nome	Representação no eixo real	Símbolo	Subconjunto de R
Intervalo fechado de a até b		[a, b]	$\{X \in R / a \leq x \leq b\}$
Intervalo aberto entre a e b		(a, b) ou]a, b[	$\{X \in R / a < x < b\}$
Intervalo aberto à esquerda e fechado à direita entre a e b		(a, b] ou]a, b]	$\{X \in R / a < x \leq b\}$
Intervalo fechado à esquerda e aberto à direita entre a e b		[a, b) ou [a, b[	$\{X \in R / a \leq x < b\}$
Intervalo infinito à esquerda e aberto em a		$(-\infty, a)$ ou $]-\infty, a[$	$\{X \in R / x < a\}$
Intervalo infinito à direita e aberto em a		$(a, +\infty)$ ou $]a, +\infty[$	$\{X \in R / x > a\}$
Intervalo infinito à esquerda e fechado em a		$(-\infty, a]$ ou $]-\infty, a]$	$\{X \in R / x \leq a\}$
Intervalo infinito à direita e fechado em a		$[a, +\infty)$ ou $[a, +\infty[$	$\{X \in R / x \geq a\}$
Intervalo infinito de $-\infty$ a $+\infty$		$(-\infty, +\infty)$ ou $]-\infty, +\infty[$	R

Importante saber

1) O círculo cheio (●) indica que os extremos pertencem ao intervalo.
2) O círculo vazado (o) indica que os extremos não pertencem ao intervalo.

Exemplos:

O conjunto representado pelos números reais maiores ou iguais a 2 e menores ou iguais a 5.

Indica-se:
$\{x \in R \,/\, 2 \leq x \leq 5\}$ ou $[2, 5]$

O conjunto representado pelos números reais maiores que 2 e menores que 5.

Indica-se:
$\{x \in R \,/\, 2 < x < 5\}$ ou $]2, 5[$ ou $(2, 5)$

O conjunto representado pelos números reais maiores que 2 e menores ou iguais a 5.

Indica-se:
$\{x \in R \,/\, 2 < x \leq 5\}$ ou $]2, 5]$ ou $(2, 5]$

O conjunto representado pelos números reais menores ou iguais a 2.

Indica-se:
$\{x \in R \,/\, x \leq 2\}$ ou $]-\infty, 2]$ ou $(-\infty, 2]$

Exercícios

06. Represente, no eixo real, os intervalos:

a) $[3, 7]$

b) $[3, 7)$

c) $(3, 7)$

d) $(3, 7]$

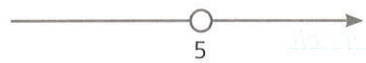
07. Represente os intervalos:

a) $[2, +\infty)$

b) $(-\infty, 2]$

c) $(-\infty, 7)$

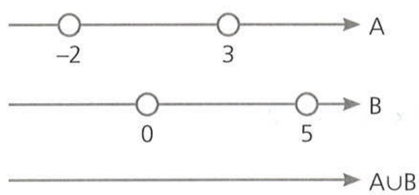
d) $(5, +\infty)$



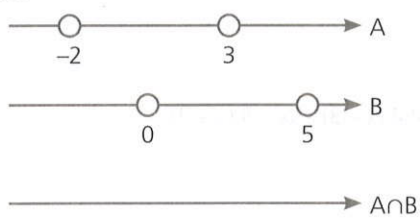
08. Sendo dados os conjuntos A e B, encontre A∪B e A∩B.

$A = \{x, x \in R \text{ e } -2 < x \leq 3\}$
$B = \{x, x \in R \text{ e } 0 \leq x < 5\}$

a) A∪B



b) A∩B



Inequações do 1.º grau

Inequação do 1.º grau é toda desigualdade do tipo:

$ax + b > 0 \quad ax + b < 0 \quad ax + b \geq 0 \quad ax + b \leq 0$

Baseia-se na resolução de uma equação do 1.º grau, apenas com a diferença que a solução de uma inequação do 1.º grau é um intervalo e que ao multiplicarmos a desigualdade por –1 devemos inverter os sinais de >, <, ≥ ou ≤. Por exemplo, $4 > 2$, mas $-4 < -2$.

Exemplos:

a) $2x + 1 > 4$

$2x > 4 - 1$

$2x > 3$

$x > \frac{3}{2}$

$S = \left\{x \in R / x > \frac{3}{2}\right\}$

b) $x + 1 \le 2x + 4$

$x - 2x \le 4 - 1$

$-x \le 3 \,.\, (-1)$

$x \ge -3$

$S = \{x \in R/x \ge -3\}$

Exercício

09. Resolva:

a) $2x > 0$

b) $x - 1 \le 0$

c) $x - 1 \ge 3x + 2$

d) $\frac{x}{3} - 1 < -x + 2$

e) $4(x - 3) \ge 5x - 3(x + 2)$

Testes

09. A solução da inequação $9(x - 5) < -4(1 - x)$ é o conjunto dos números reais x, tais que:

a) $x > \frac{41}{2}$

b) $x > \frac{41}{5}$

c) $x < \frac{41}{2}$

d) $x < -\frac{41}{8}$

10. O menor número inteiro x que satisfaz a inequação $8 - 3(2x - 1) < 0$ é:

a) 1

b) –1

c) 2

d) –2

11. O maior valor inteiro de x que satisfaz a inequação $\frac{3x}{4} - \frac{3}{2} < \frac{3}{4} - \frac{5x - 7}{4}$ é:

a) 3

b) 2

c) –2

d) 1

e) –1

12. Resolver $-\frac{x}{2} + 1 > 3x$:

a) $x < \frac{2}{7}$

b) $x > 0$

c) $x > \frac{2}{7}$

d) $x \ge 0$

e) n.d.a.

13. $12 - 5x > x - 60$:

a) $x > 12$

b) $x < 12$

c) $x > 18$

d) $x < -12$

e) n.d.a.

14. Determine o conjunto solução da inequação $-\frac{x}{2} + 1 > \frac{3x}{4}$:

a) $S = \{x \in R/x < 4\}$

b) $S = \left\{x \in R / x < \frac{4}{5}\right\}$

c) $S = \left\{x \in R / x > \frac{4}{5}\right\}$

d) $S = \{x \in R/x > 0\}$

e) n.d.a.

> "A questão primordial não é o que sabemos, mas como sabemos."
>
> Aristóteles

Inequações do 2.º grau

São inequações do tipo:

Inequação	Exemplo
$ax^2 + bx + c > 0$	$x^2 + 3x + 4 > 0$
$ax^2 + bx + c < 0$	$2x^2 - 4x - 21 < 0$
$ax^2 + bx + c \geq 0$	$2x^2 + 4x - 5 \geq 0$
$ax^2 + bx + c \leq 0$	$x^2 - 7x + 10 \leq 0$

Para resolvermos uma inequação do 2.º grau devemos calcular as suas raízes e depois analisar o sinal.

Exemplos:

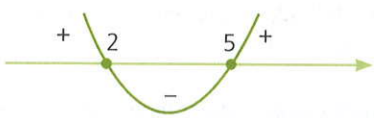
1. Resolva a inequação $x^2 - 7x + 10 \leq 0$

1.º) Encontramos as raízes da inequação

$x^2 - 7x + 10 = 0 \rightarrow x' = 5$ e $x'' = 2$

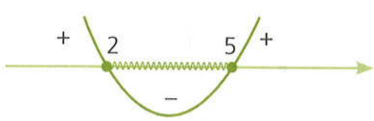
Portanto, a parábola corta a reta real em 2 pontos.

2.º) Analisamos o sinal. Como a concavidade é para cima e o sinal $\leq$ indica intervalo fechado, o gráfico tem o seguinte aspecto.



Como queremos $x^2 - 7x + 10 \leq 0$, ou seja, queremos a parte da reta dos reais onde a expressão é negativa, e como no gráfico isso acontece entre 2 e 5 a resposta será $S = \{x \in R / 2 \leq x \leq 5\}$ ou $S = [2, 5]$.

Graficamente:



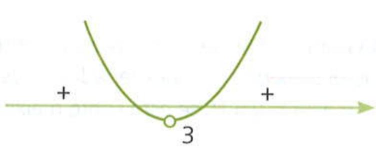
2. Resolva a inequação $x^2 - 6x + 9 > 0$

1.º) Encontramos as raízes da inequação

$x^2 - 6x + 9 = 0 \rightarrow x' = x'' = 3$

Portanto, a parábola apenas toca a reta real.

2.º) Analisamos o sinal. Como a concavidade é para cima, e o sinal $>$ indica que as raízes não pertencem à resposta, o gráfico fica assim:



Como queremos $x^2 - 6x + 9 > 0$, ou seja, queremos a parte da reta dos reais onde a expressão $x^2 - 6x + 9$ é positiva, tomamos toda a reta, com exceção do 3.

Portanto, a resposta da inequação é

$S = \{x \in R / x \neq 3\}$ e $S = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$.

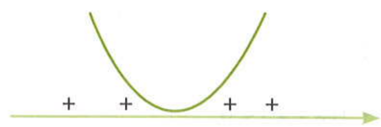
3. Resolva a inequação $x^2 + x + 1 < 0$

1.º) Note que esta equação não possui raízes, pois $\Delta < 0$.

$\Delta = b^2 - 4ac$ $\Delta = 1 - 8$

$\Delta = 1 - 4 . 1 . 2$ $\boxed{\Delta = -7}$

Com isso a parábola não toca a reta real como na figura abaixo:



Logo, todos os valores são positivos. Portanto, a inequação não tem a solução, pois ela pede que $x^2 + x + 1 < 0$ e na parábola não existem valores negativos.

Exercícios

10. Resolva cada inequação:

a) $x^2 - 5x + 6 \leq 0$

b) $x^2 - 7x + 6 > 0$

c) $x^2 - 2x < 0$

d) $x^2 - 6x + 9 > 0$

e) $-x^2 + 3x - 2 \geq 0$

f) $x^2 - x + 9 < 0$

Testes

Nas questões a seguir, determine o conjunto solução das inequações:

15. $4 - x^2 \geq 0$
a) $\{x \in R \,/\, x \leq -2 \text{ ou } x \geq 2\}$
b) $\{x \in R \,/\, x \leq -2 \text{ ou } x \geq 3\}$
c) $\{x \in R \,/\, -3 \leq x \leq 2\}$
d) $\{x \in R \,/\, -2 \leq x \leq 2\}$
e) $\{x \in R \,/\, x \geq 0\}$

16. $6x^2 - 2x + 3 > 0$
a) $x > 2$
b) R
c) $x < 3$
d) $\varnothing$
e) $x < 8$

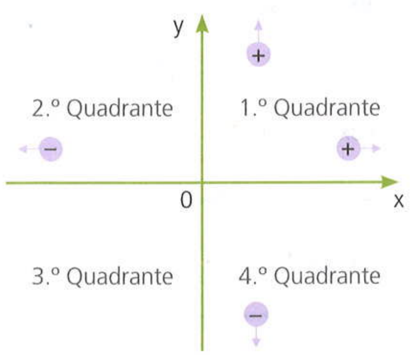
17. $x^2 - 10x + 25 < 0$
a) $x > 3$
b) $x < 2$
c) $\varnothing$
d) R
e) $x > 3$

18. $-x^2 + 6x - 9 < 0$
a) $\{x \in R \,/\, x \neq 2\}$
b) $\{x \in R \,/\, x \neq 3\}$
c) $\{x \in R \,/\, x \geq 3\}$
d) $\{x \in R \,/\, -3 < x < 3\}$
e) $\varnothing$

19. $x^2 - 7x + 10 \leq 0$
a) $(2; 5)$
b) $(-\infty, 2) \cup [5; \infty)$
c) $[2; 5]$
d) $x \leq 2$ ou $x \geq 5$
e) $[0, 7]$

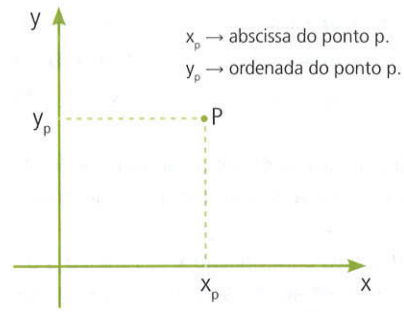
Sistema cartesiano (ortogonal)

Consideramos num plano $\propto$ dois eixos orientados e perpendiculares, que se interceptam num ponto 0, chamado de origem do plano cartesiano.



- **Eixo horizontal**
Eixo dos **x** ou eixo das **abscissas**.

- **Eixo vertical**
Eixo dos **y** ou eixo das **ordenadas**.



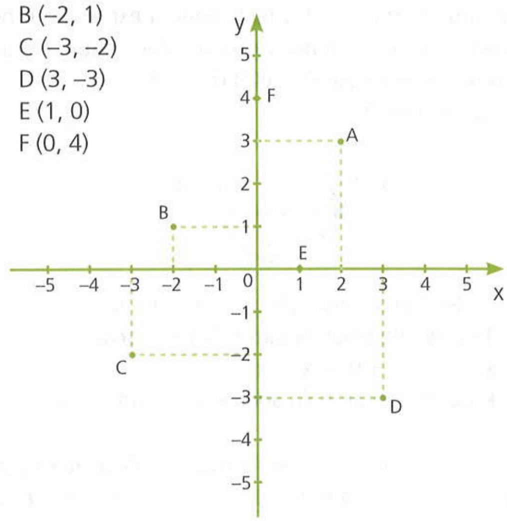
A representação do ponto P no plano cartesiano se dá através de P (x_p, y_p), onde (x_p, y_p) é chamado de par ordenado.

Nestas condições o par ordenado que representa o ponto A (4, 2) é diferente do par ordenado que representa o ponto B (2, 4), pois temos A e B pontos distintos do plano cartesiano.

Exemplo:

Os pontos abaixo estão representados no sistema de coordenadas cartesianas.

A (2, 3)
B (−2, 1)
C (−3, −2)
D (3, −3)
E (1, 0)
F (0, 4)

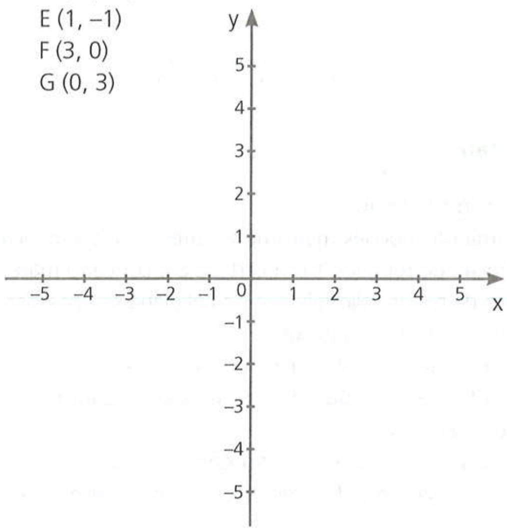


Todo ponto que está sobre os eixos coordenados possui uma de suas coordenadas nulas. Se está sobre o eixo x, y = 0; se está sobre o eixo y, x = 0.

Exercícios

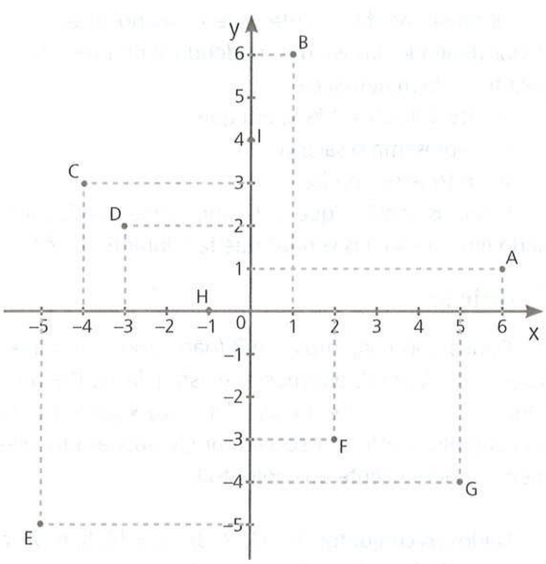
11. Represente os pontos dados por suas coordenadas.

A (2, 1)
B (–1, 2)
C (–2, –2)
E (1, –1)
F (3, 0)
G (0, 3)



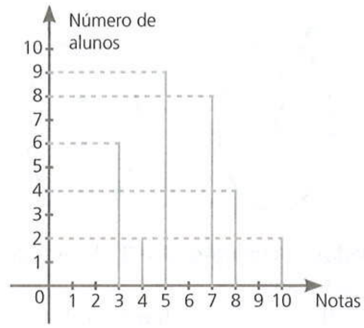
12. Escreva as coordenadas dos pontos abaixo.

A (,)	F (,)
B (,)	G (,)
C (,)	H (,)
D (,)	I (,)
E (,)	



Desafio

(UFRJ) O gráfico mostra a distribuição de notas em uma prova de Matemática. Quantos alunos fizeram a prova?



Produto cartesiano

Dados dois subconjuntos de Z, A e B (não vazios). Denomina-se produto cartesiano de A por B (indica-se A X B) o conjunto formado por todos os pares ordenados nos quais o primeiro elemento pertence ao conjunto A e o segundo pertence ao conjunto B.

Representação matemática:

A X B = {(x, y) / x ∈ A e y ∈ B}

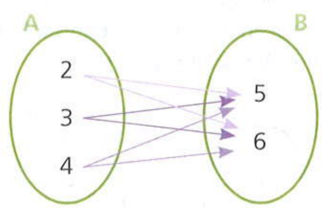
Exemplo:

Dados os conjuntos A = {2, 3, 4} e B = {5, 6}, determine A X B:

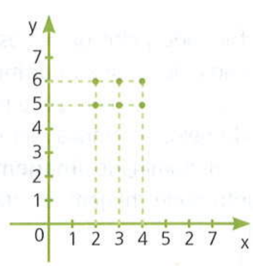
A X B = {(2, 5); (2, 6); (3, 5); (3, 6); (4, 5); (4, 6)}

Representação:

a) Diagrama de flechas

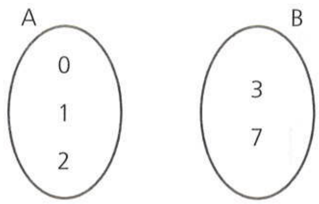


b) Sistema cartesiano



Exercícios

13. Represente no diagrama o produto cartesiano A X B, dados: A = {0, 1, 2} e B = {3, 7}. Em seguida, escreva o produto cartesiano A X B.



14. Dados os conjuntos A e B, determine cada produto cartesiano:

A = {2, 7} B = {0, 1, 5}

a) A X B

b) B X A

c) A X A

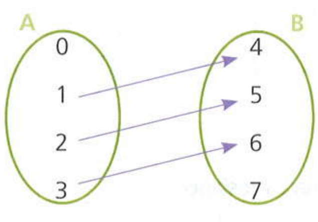
Relação

Dados dois conjuntos A e B, chamamos de relação R de A em B a qualquer subconjunto de A X B.

Exemplo:

Dados os conjuntos A = {0, 1, 2, 3} e B = {4, 5, 6, 7}, determine a relação de A em B, representada por:

R = {(x, y) ∈ A X B / y = x + 3}

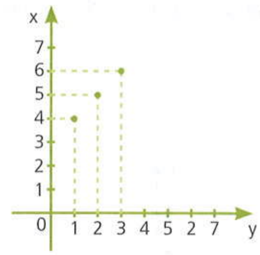


O conjunto formado pelos primeiros elementos de cada par da relação é denominado **domínio** (no exemplo acima é o conjunto de onde partem as setas) e o conjunto formado pelos segundos elementos de cada par da relação é denominado **imagem** (no exemplo acima é o conjunto onde chegam as setas). Assim:

D = {1, 2, 3}

Im = {4, 5, 6}

No plano cartesiano, cada par da relação é representado por um ponto.



Função

Noção de função

Uma das noções mais importantes da Matemática é a noção de funções. Com certeza é o conceito matemático de maior aplicabilidade no cotidiano das pessoas. Vejamos o exemplo abaixo:

Um vendedor de carros recebe mensalmente um salário fixo de R$ 400,00, mais uma comissão de 1% sobre as vendas.

Considere a tabela abaixo com os resultados das vendas desse vendedor nos três primeiros meses deste ano:

Mês	Venda (R$)	Fixo (R$)	Comissão (R$)	Salário (R$)
Janeiro	80 000,00	400,00	800,00	1 200,00
Fevereiro	120 000,00	400,00	1 200,00	1 600,00
Março	112 000,00	400,00	1 120,00	1 520,00

Observamos, facilmente, que o salário desse vendedor depende das vendas, podendo ser representado pela fórmula matemática:

S = R$ 400,00 + 1% V, em que:

S – representa o salário

V – o total de vendas

Dizemos, então, que o salário desse vendedor é dado em função das vendas que faz durante o mês.

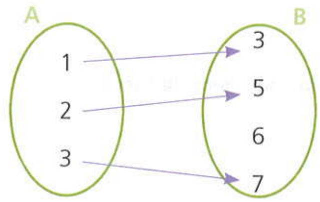
Definição

Dados dois conjuntos A e B (não vazios) e uma relação R de A em B, dizemos que esta relação R é uma função de A em B, se a cada elemento **x** pertencente ao conjunto A estiver associado um, e apenas um, elemento **y** pertencente ao conjunto B.

Exemplos:

Dados os conjuntos A = {1, 2, 3} e B = {3, 5, 6, 7}, e uma relação R de A em B, representada por:

$R_1 = \{(x, y) \in A \times B \,/\, y = 2x + 1\}$
Observe o diagrama abaixo:



Dizemos que a relação R_1 é uma função de A em B, pois a cada elemento de A está associado um único elemento de B.

No diagrama anterior:

D = Domínio = {1, 2, 3} = A

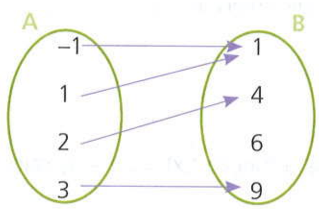
CD = Contradomínio = {3, 5, 6, 7} = B

Im = Imagem = {3, 5, 7}

Portanto, numa função, o domínio é sempre o conjunto A e a imagem é um subconjunto de B.

Dados os conjuntos $A = \{-1, 1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 4, 6, 9\}$, e uma relação R de A em B, representada por:

$R_2 = \{(x, y) \in A \times B \,/\, y = x^2\}$
Observe o diagrama abaixo:



Dizemos que a relação R_2 é uma função de A em B, pois a cada elemento de A está associado um único elemento de B. Observe, porém, que ao mesmo elemento de B, pode estar associado mais de um elemento de A.

D = {–1, 1, 2, 3}

CD = {1, 4, 6, 9}

Im = {1, 4, 9}

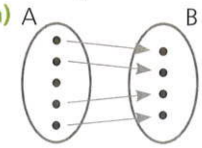
Para representar uma função que tem domínio **A** e imagem em **B**, denotaremos por f: A ⟶ B (lê- -se: "f de A em B") ou, ainda, a notação y = f(x) (lê-se: y igual a f de x) em que **x** representa um elemento qualquer do domínio e **y** da imagem.

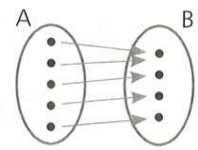
Exemplos:

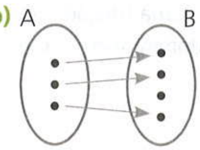
$y = 2x + 1$ ou $f(x) = 2x + 1$
$y = x^2$ ou $f(x) = x^2$
$y = x + 4$ ou $f(x) = x + 4$

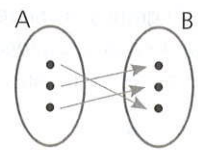
Exercícios

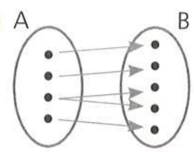
15. Assinale os diagramas abaixo que representam uma função de A em B.

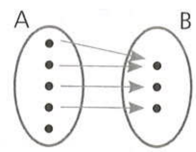
a)


d)


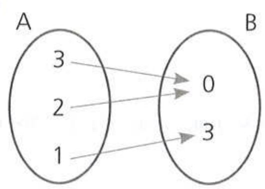
b)


e)


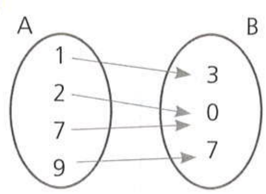
c)


f)


16. Determine o domínio e a imagem de cada função, f : A ⟶ B:

a)


D =
Im =

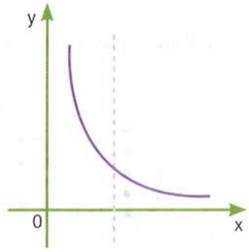
b)


D =
Im =

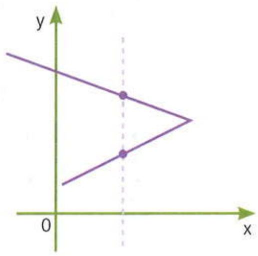
Quando um gráfico representa ou não uma função

Como vimos nos exemplos anteriores, para que tenhamos uma função de **A** em **B**, a cada $x \in A$ deve estar associado um único $y \in B$. Geometricamente, toda reta paralela ao eixo **y**, que intercepta (corta) o gráfico deve fazê-lo num único ponto, caso contrário, esse gráfico não é gráfico de uma função.

Exemplos:



O gráfico acima representa uma função, pois qualquer reta paralela (dentro do domínio) ao eixo **y**, intercepta-o em um único ponto.

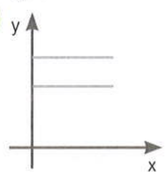


O gráfico acima não representa uma função, pois existem retas paralelas ao eixo **y**, interceptando-o em mais de um ponto.

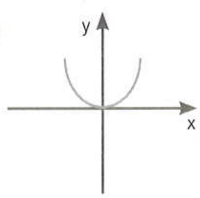
Exercícios

17. Dos gráficos a seguir, quais representam uma função?

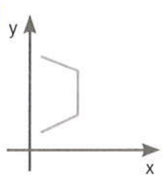
a)



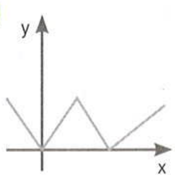
c)



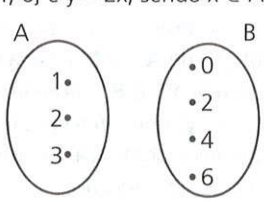
b)



d)



18. Dada a função f: A ⟶ B, tal que A = {1, 2, 3} e B = {0, 2, 4, 6} e y = 2x, sendo x ∈ A e y ∈ B.



a) Escreva o domínio da função.

b) Escreva a imagem da função.

19. Dada a função f: R ⟶ R definida por $f(x) = x^2 - 5x + 6$, calcule:

a) $f(-1) =$

b) $f(2) =$

c) $f(0) + f(3) =$

d) Os valores reais de **x** para que se tenha $f(x) = 0$.

20. Dada a função $f(x) = 2x + 3$, calcule **x**, sendo $f(x) = 13$.

21. (UFPR/Adaptado) No interior de uma caverna existe uma estalagmite, cuja altura aumenta de modo constante à razão de 1 cm a cada 10 anos. Nestas condições, a função **h** definida por $h(t) = \dfrac{t}{10}$ com $t \geq 0$, relaciona a altura da estalagmite (em centímetros) com o tempo **t** (em anos) decorrido desde o início de sua formação.

Fotolia

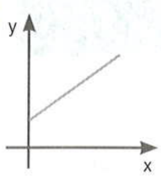
a) Calcule h (80).

b) Quantos anos são necessários para que haja um aumento de 20 cm na altura da estalagmite?

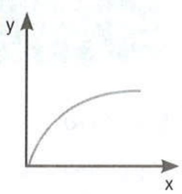
Testes

20. (PUC-PR) Qual dos gráficos não representa uma função?

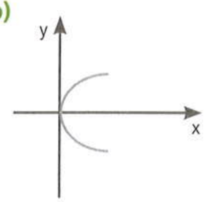
a)



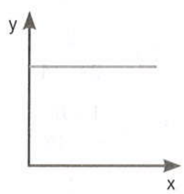
d)



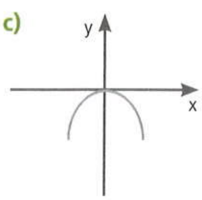
b)



e)



c)



21. (USP) Dada a função **f** de A = {–3, –2, –1} em B = {–3, –2, 1, 2, 4, 6} definida por f(x) = 3x + 7, o conjunto imagem de **f** é:

a) {–2, 1, 4}
b) {–3, –2, 1}
c) {–3, 2, 4}
d) {2, 4, 6}
e) {1, 4, 6}

22. Dadas as funções $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = 2x + 3$, o valor de $f(-2) + g(1)$ é:

a) 0
b) 8
c) 6
d) 10
e) –8

23. (FMU-SP) Seja a função f definida por $f(x) = 2x^3 - 1$. Então $f(0) + f(-1) + f\left(\frac{1}{2}\right)$ é:

a) $-\frac{3}{4}$
b) $-\frac{15}{4}$
c) $-\frac{17}{4}$
d) $-\frac{19}{4}$
e) $-\frac{13}{4}$

24. Dadas as funções definidas por $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ e $g(x) = x^2 - 1$, calcule $f(6) + g(-2)$:

a) 4
b) 5
c) 6
d) 7
e) –6

25. (UEL-PR) Para que os pontos (1; 3) e (3; –1) pertençam ao gráfico da função dada por $f(x) = ax + b$, o valor de $b - a$ deve ser:

a) 7
b) 5
c) 3
d) –3
e) –7

26. A população de uma cidade é estimada pela função $f(t) = 50000 + \frac{5000}{t}$ sendo **t** o tempo em anos, $t \neq 0$.
Calcule o valor numérico da função que possibilita fazer a estimativa da população da cidade daqui a:

a) 2 anos;

b) 10 anos.

27. (FGV-SP) A população de uma cidade daqui a t anos é estimada em $p(t) = 30 - \frac{4}{t}$ milhares de pessoas. Durante o 5.º ano, o crescimento da população será de:

a) 300 pessoas.
b) 200 pessoas.
c) 133 pessoas.
d) 30 pessoas.
e) 2 pessoas.

Domínio de uma função

Da Matemática básica

Intervalo aberto $\begin{cases} (\ \ ) \\ > \text{ ou } < \\ \circ \text{ (gráfico} \end{cases}$ Intervalo fechado $\begin{cases} [\ \ ] \\ \geq \text{ ou } \leq \\ \bullet \text{ (gráfico} \end{cases}$

Exemplos:

$[a, +\infty)$; $x \geq a$

$(-\infty, a]$; $x \leq a$

$(-\infty, a)$; $x < a$

$[a, b]$; $a \leq x \leq b$

$(-\infty, a)$; $[b, +\infty)$;
$x < a$ ou $x \geq b$

Domínio

Achar o **domínio** ou o **campo de existência** de uma função é determinar os valores que x pode assumir, de tal forma que resulte para **y** um valor **real** e **finito**.

Exemplo:

Na função $y = \frac{3x+2}{x-3}$ o **x** não pode ser igual a 3, pois isso faria com que o denominador (x – 3) ficasse igual a zero, não existindo, portanto, um valor real para **y**. De outra forma, na função $y = \sqrt{x+2}$, o **x** não pode ser menor que a –2, pois não existiria um valor real para **y** (raiz de índice par, com radicando negativo, não admite solução pertencente ao conjunto dos reais).

Regras práticas para a determinação do domínio: D(f): Domínio da função

- **Funções fracionárias**

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \longrightarrow D(f) = \{x \in R \ / \ g(x) \neq 0\}$$

- **Funções irracionais**

$$y = \sqrt[\text{par}]{f(x)} \longrightarrow D(f) = \{x \in R \ / \ f(x) \geq o\}$$
$$y = \sqrt[\text{ímpar}]{f(x)} \longrightarrow D(f) = R$$

- **Funções irracionais com radicais de índice par em denominador**

$$y = \frac{f(x)}{\sqrt[\text{ímpar}]{g(x)}} \longrightarrow D(f) \ \{x \in R \ / \ g(x) > 0\}$$

Exercício

22. Encontre o domínio das funções:

a) $f(x) = \frac{x+2}{x-5}$

b) $f(x) = \frac{7}{2x-4}$

c) $f(x) = \frac{1-3x}{x^2-16}$

d) $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$

e) $f(x) = \sqrt{x-7}$

f) $f(x) = \sqrt{x^2-7x+12}$

g) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x-9}}$

h) $f(x) = \frac{-8}{\sqrt{x^2-9x}}$

Testes

28. Encontre o domínio de $y = \frac{3x+2}{3x-6}$

a) $\{x \in R \ / \ x > 2\}$
b) $\{x \in R \ / \ x \geq 2\}$
c) $\{x \in R \ / \ x \neq 2\}$
d) $\{x \in R \ / \ x = 2\}$
e) $\varnothing$

29. Encontre o domínio de $f(x) = \sqrt{4x - 8}$:

a) $\{x \in R / x = 2\}$
b) $\{x \in R / x \neq 2\}$
c) $\{x \in R / x > 2\}$
d) $\{x \in R / x \geq 2\}$
e) R

30. Qual o domínio da função $y = \sqrt[3]{x^2 - 4}$?

a) $\{x \in R / x = 2\}$
b) $\{x \in R / x \neq -2\}$
c) $\{x \in R / x \geq -2\}$
d) $\{x \in R / x > 2\}$
e) R

31. O domínio real da função $f(x) = \sqrt{x^2 - 8x + 15}$ é:

a) R
b) $\{x \in R / 3 \leq x \leq 5\}$
c) $\{x \in R / 3 < x < 5\}$
d) $\{x \in R / x < 3 \text{ ou } x > 5\}$
e) $\{x \in R / x \leq 3 \text{ ou } x \geq 5\}$

32. O domínio da função $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x+1}}$ é:

a) $\{x \in R / x \neq -1\}$
b) $\{x \in R / x \neq 1\}$
c) $\{x \in R / x > -1\}$
d) $\{x \in R / x \geq -1\}$
e) R

33. O domínio de $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x - x^2}}$ é:

a) [0, 1]
b) [0, 1)
c) (0, 1)
d) $(1, \infty) \cup (-\infty, 0)$

34. Encontre o domínio da função $f(x) = \dfrac{4x - 2}{x^2 - 8x + 12}$:

a) $\{x \in R / x \neq 6 \text{ e } x \neq 2\}$
b) $\{x \in R / x \neq -6 \text{ e } x \neq -2\}$
c) $\{x \in R / x \neq -6 \text{ e } x \neq 2\}$
d) $\{x \in R / x \neq 6 \text{ e } x \neq -2\}$
e) $\{x \in R / x \neq 8 \text{ e } x \neq 12\}$

Função composta

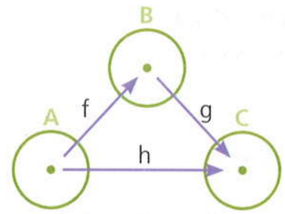
Preliminares

Considerando as funções f: A → B e g: B → C, podemos estabelecer uma terceira função h de A → C, denominada **função composta** de **g** e **f**, indicada por h = g[f(x)] ou h = gof(x).

- **Nota**

g (f(x)) lê-se: g de f de x → g composta com f(x)
(gof) (x) lê-se: g bola f

- **Diagrama**



Outras funções compostas:
f(g(x)) = (fog) (x) → f composta com g(x)
f(f(x)) = (fof) (x) → f composta com f(x)
g(g(x)) = (gog) (x) → g composta com g(x)

Exercício resolvido

01. Dadas as funções f(x) = 2x – 3 e g(x) = 3x + 1, determine:

a) f(g(0))

Resolução:

I. Cálculo de g(0)
g(x) = 3x + 1
g(0) = 3 . 0 + 1
g(0) = 1

II. Cálculo de f(1)
f(x) = 2x – 3
f(1) = 2 . 1 – 3
f(1) = –1

Portanto: **f(g(0)) = –1**

b) g(f(–1))

Resolução:

I. Cálculo de f(–1)
f(x) = 2x – 3
f(–1) = 2 . (–1) – 3
f(–1) = –5

II. Cálculo de g(–5)
g(x) = 3x + 3
g(–5) = 3 . (–5) + 1
g(–5) = –14

Portanto: **g(f(–1)) = –14**

c) f(g(x))

Resolução:

Substituir **x** da função **f** por g(x)
f(x) = 2x – 3
f(g(x)) = 2 . (g(x)) – 3
f(g(x)) = 2 . (3x + 1) – 3
f(g(x)) = 6x + 2 – 3
f(g(x)) = 6x – 1

d) g(f(x))

Resolução:

Substituir **x** da função **g** por f(x)

$g(x) = 3x + 1$

$g(f(x)) = 3(f(x)) + 1$

$g(f(x)) = 3(2x - 3) + 1$

$g(f(x)) = 6x - 9 + 1$

$g(f(x)) = 6x - 8$

Exercícios

23. Dadas as funções $f(x) = 2x + 3$ e $g(x) = x + 1$, calcule:

a) f(g(7))

b) f(g(4))

c) f(g(x))

24. Dadas as funções:

$f(x) = \dfrac{2x + 3}{5}$

$g(x) = x + 2$

Calcule f(g(4)):

25. Dadas as funções:

$f(x) = 5x + 3$

$g(x) = 2x + 1$

Determine:

a) f(g(x))

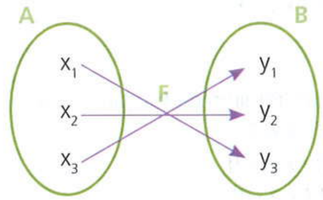
b) g(f(x))

c) f(f(x))

d) g(g(x))

Função inversa ($f^{-1}(x)$ ou y^{-1})

Seja **f** uma função **bijetora** (todos os elementos de B são imagens dos elementos de A, em f: A → B), de A em B.

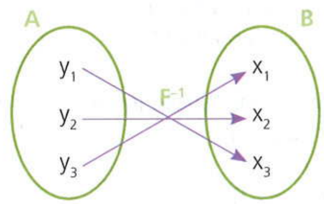


Neste caso, dizemos:

$y_3 = f(x_1)$ $\quad$ $y_2 = f(x_2)$ $\quad$ $y_1 = f(x_3)$

Para se obter a função inversa, deve-se fazer uma inversão nos dois conjuntos: o **domínio** passa a ser **imagem** e a **imagem** passa a ser **domínio**.

Então:



Neste caso, dizemos:

$x_3 = f^{-1}(y_1)$ $\quad$ $x_2 = f^{-1}(y_2)$ $\quad$ $x_1 = f^{-1}(y_3)$

Exercício resolvido

01. Calcular a inversa das funções:

a) $y = 3x - 1$

Resolução:

I. troca-se "x por y" e "y por x"

$x = 3y - 1$

II. isola-se y

$x = 3y - 1$

$x + 1 = 3y$

$x + \dfrac{x + 1}{3} = y$

Portanto, a função inversa de $y = 3x - 1$ é $y^{-1} = \dfrac{x + 1}{3}$.

b) $f(x) = \dfrac{2x - 3}{4}$

Resolução:

I. Troca-se "x por y" e "y por x"

$x = \dfrac{2y - 3}{4}$

II. Isola-se y

$x = \frac{2y - 3}{4}$

$4x = 2y - 3$

$4x + 3 = 2y$

$\frac{4x + 3}{2} = y$

Com isso $f^{-1}(x) = \frac{4x + 3}{2}$.

Exercícios

26. Determine a inversa de cada função:

a) $y = 3x - 2$

b) $f(x) = \frac{x + 1}{4}$

c) $y = \frac{x + 2}{x + 1}$

27. Determine o que se pede:

a) $f^{-1}(2)$ com $f(x) = x + 7$

b) $f^{-1}(3)$ com $f(x) = \frac{x + 1}{x - 4}$

Testes

35. Encontre a função inversa de $y = \frac{x + 5}{6}$:

a) $y = \frac{6}{x + 5}$

b) $y = 6x - 5$

c) $y = 5 + 6x$

d) $y = \frac{x + 5}{-6}$

e) $y = 5 + x$

36. Sendo $f(x) = x^2$ e $g(x) = 2x + 1$, determine $f[g(x)]$:

a) $2x + 1$

b) $2x^2 + 1$

c) $4x^2 + 4x + 1$

d) $4x^2 + 1$

e) $3x + 4$

37. Encontre a inversa de $f(x) = \frac{x + 1}{x + 2}$:

a) $f^{-1}(x) = \frac{1 - 2x}{x - 1}$

b) $f^{-1}(x) = \frac{1 + 2x}{x + 1}$

c) $f^{-1}(x) = \frac{x + 2}{x + 1}$

d) $f^{-1}(x) = 3x + 2$

e) $f^{-1}(x) = x - 1$

38. (PELOTAS) Se **f** e **g** são funções definidas em R por $f(x) = x + 2$ e $g(x) = 3x + 5$, então $g[f(x)]$ é:

a) $3x + 11$

b) $3x^2 + 10$

c) $3x^2 + 11x + 10$

d) $4x + 7$

e) $f[g(x)]$

39. Encontre $f^{-1}(2)$ em $f(x) = \frac{4x - 2}{3}$.

a) $f^{-1}(2) = 1$

b) $f^{-1}(2) = -1$

c) $f^{-1}(2) = -2$

d) $f^{-1}(2) = 2$

e) $f^{-1}(2) = 3$

40. Dado $f(x) = \frac{3x - 10}{6x - 1}$, calcular $f^{-1}(1)$.

a) –2

b) –4

c) –3

d) 4

e) –6

41. Dado $f(x) = x^2 + 3x$ e $g(x) = x - 3$, encontre $f[g(0)]$:

a) 0

b) 3

c) 2

d) –2

e) 6

42. (BAHIA) Seja a função $f(x) = 2x - 1$. O valor de $f(f(2))$ é:

a) 1

b) 3

c) 5

d) 7

e) 9

"A Matemática, quando a compreendemos bem, possui não somente a verdade, mas também a suprema beleza."

Bertrand Russell

Função polinomial do 1.º grau

Dados dois números reais **a** e **b**, com $a \neq 0$, denominamos função polinomial do 1.º grau a toda função do tipo $f(x) = ax + b$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

São exemplos de função polinomial do 1.º grau:

$$f(x) = 3x - 2 \begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \end{cases}$$

$$f(x) = -2x + 4 \begin{cases} a = -2 \\ b = 4 \end{cases}$$

- A cada valor atribuído a **x**, corresponde um único valor de **y**.
- O domínio é sempre um número pertencente ao conjunto dos reais.

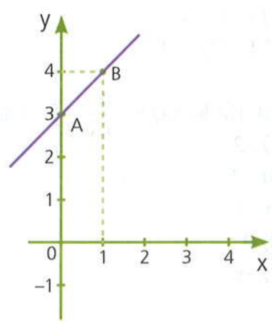
Gráfico de uma função do 1.º grau

Todo gráfico de uma função do 1.º grau é uma reta. Para a construção deste gráfico são necessários e suficientes 2 pontos.

Vejam os exemplos a seguir:

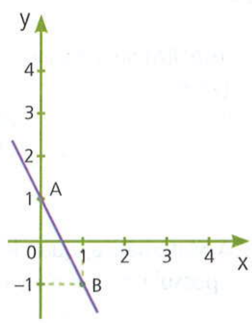
a) $f(x) = x + 3$

	x	y
A	0	3
B	1	4



b) $y = -2x + 1$

	x	y
A	0	1
B	1	–1

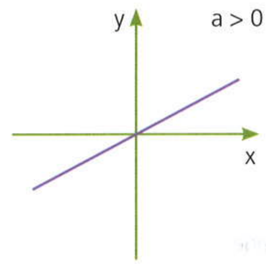


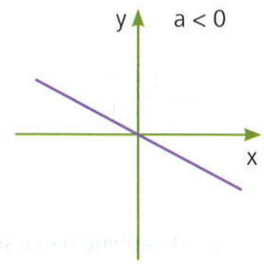
Importante saber

Seja $f(x) = ax + b$ ou $y = ax + b$ uma função do 1.º grau:

- **a** é chamado coeficiente angular da reta e **b** é denominado coeficiente linear desta reta.
- Se $a > 0$, a função é crescente e o gráfico é inclinado para a direita.
- Se $a < 0$, a função é decrescente e o gráfico é inclinado para a esquerda.
- Se **a**, **b** símbolo R, $a \neq 0$ e $b \neq 0$, a função é denominada função afim.
- Se $a \neq 0$ e $b = 0$, a função é denominada função linear.
- O gráfico intercepta (corta) o eixo **y** no valor de **b** (quando $x = 0$).
- O gráfico intercepta (corta) o eixo **x** no zero da função (quando $y = 0$).

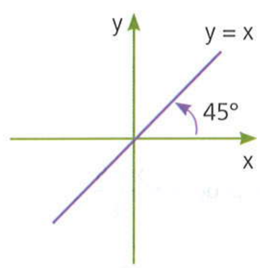
O gráfico da função linear intercepta a origem do sistema cartesiano.



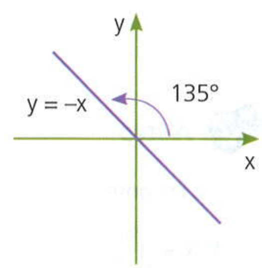


Casos particulares

Função identidade (1.ª bissetriz)



Função 2.ª bissetriz



Raiz de uma função do 1.º grau

Raiz de uma função é o ponto onde o gráfico desta corta o eixo x (abscissas), ou seja, é o ponto que anula a função ($y = 0$ ou $f(x) = 0$).

Exemplo:

a) A raiz da função $f(x) = 3x + 2$ é $\frac{-2}{3}$, pois:

$f(x) = 0$

$3x + 2 = 0$

$3x = -2$

$x = \frac{-2}{3}$

b) A raiz da função $y = -4x + 8$ é 2, pois:

$y = 0$

$-4x + 8 = 0$

$-4x = -8$

$4x = 8$

$x = \frac{8}{4}$

$x = 2$

Exercícios

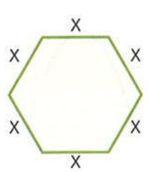
28. Dada a função do 1.º grau, $y = 3x + 2$, calcule "y" para **x** igual a:

a) 0

b) 4

c) –2

29. O perímetro **y** de um hexágono regular é a função do comprimento **x** do lado desse hexágono. Escreva a fórmula que traduz a função que corresponde ao perímetro **y**.



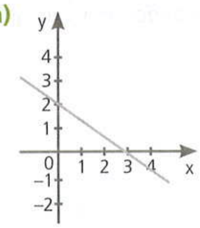
30. Encontre as raízes das funções abaixo:

a) $y = x - 2$

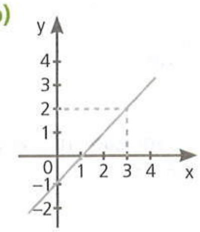
b) $f(x) = -3x - 9$

31. Encontre a raiz de cada função polinomial do 1.º grau, dada pelo gráfico correspondente.

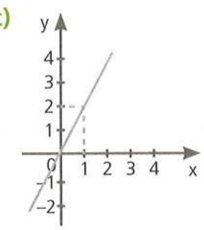
a)



b)

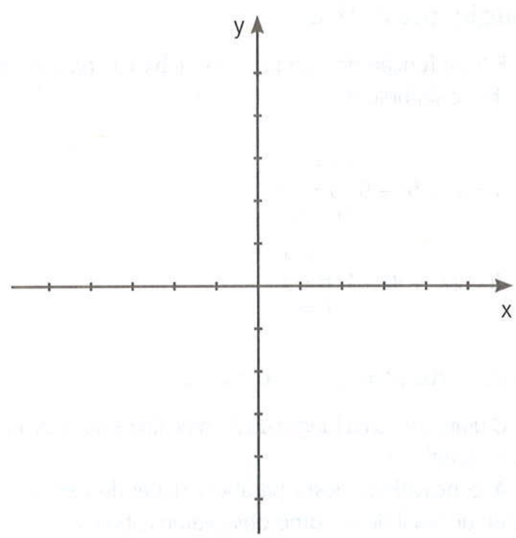


c)

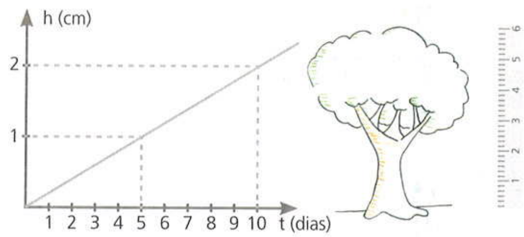


32. Construa o gráfico da função f: R → R, dada por $y = x - 1$.

x	1	2	3
y			



33. (VUNESP/Adaptada) Diariamente um botânico mede, em centímetros, o crescimento de uma planta, registrando os dados obtidos em um gráfico. Observe-o:



a) Qual das equações indica a relação entre a altura **h** (em cm) e o número em dias, **t**?

I. $h = 5t$

II. $h = t - 5$

III. $h = \dfrac{t}{5}$

IV. $h = \dfrac{t}{10}$

b) Calcule, em centímetros, a altura da planta após 30 dias.

c) Calcule, em centímetros, a altura da planta após 60 dias.

Função quadrática

É toda função do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, para $a \neq 0$ e a, **b** e **c** símbolo R.

Exemplos:

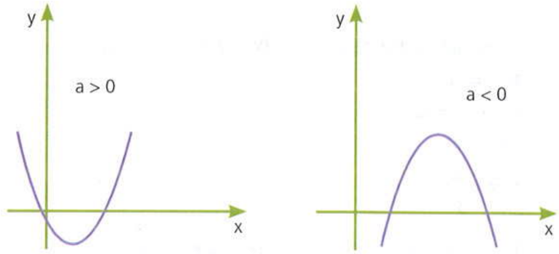
$$y = x^2 - 5x + 6 \begin{cases} a = 1 \\ b = -5 \\ c = 6 \end{cases}$$

$$f(x)\ 2x^2 + 3x - 1 \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \\ c = -1 \end{cases}$$

Gráfico de uma função do 2.º grau

O gráfico de uma função do 2.º grau ($f(x) = ax^2 + bx + c$) é uma parábola.

A concavidade desta parábola depende exclusivamente do sinal de **a**, como observamos abaixo:

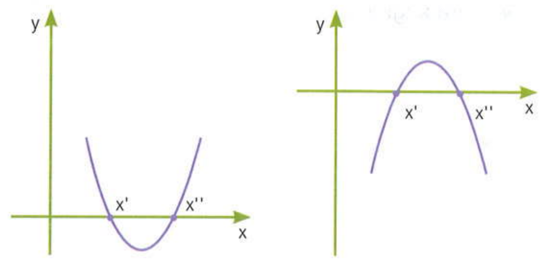


Discussão das raízes

Para determinarmos a quantidade de raízes de uma função do 2.º grau ($y = ax^2 + bx + c$) utilizamos o Δ símbolo (delta) denominado discriminante da equação. Sendo $\Delta = b^2 - 4ac$, são três as situações:

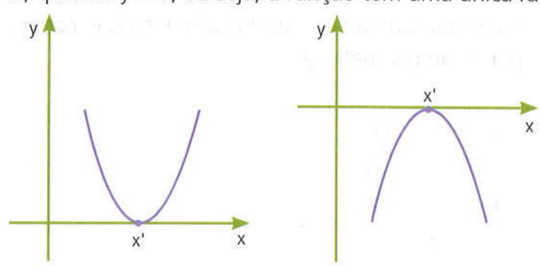
- $\Delta > 0$

A parábola corta o eixo **x** em dois pontos, x' e x'', quando y = 0, ou seja, a função tem 2 raízes reais diferentes.



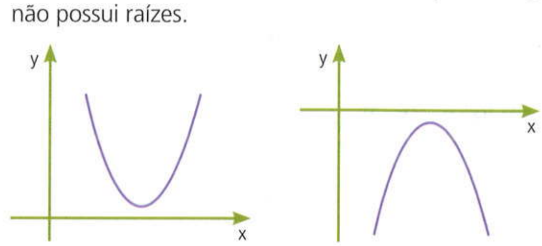
- $\Delta = 0$

A parábola tangencia o eixo **x** em um único ponto **x**, quando y = 0, ou seja, a função tem uma única raiz.



- $\Delta < 0$

A parábola não corta o eixo **x**, ou seja, a função não possui raízes.



Importante saber

A parábola corta o eixo **y** quando $x = 0$.

Exemplo:

a) $y = x^2 - 4x + 3 \longrightarrow$ corta **y** em (0, 3)

b) $y = x^2 - 5x + 6 \longrightarrow$ corta **y** em (0, 6)

Raízes de uma função do 2.º grau

São os pontos onde a parábola corta o eixo **x**, portanto devemos fazer $y = 0$ ou $f(x) = 0$.

Exemplo:

a) As raízes da função $f(x) = x^2 - 64$ são 8 e –8, pois fazendo $f(x) = 0$, tem-se:

$$x^2 - 64 = 0 \qquad x^2 = 64 \qquad x = \pm\sqrt{64} \qquad x = \pm 8$$

b) As raízes da função $y = 3x^2 - 4x$ são 0 e $\frac{4}{3}$, pois fazendo $y = 0$, tem-se:

$$3x^2 - 4x = 0$$

$$x(3x - 4) = 0 \qquad \begin{cases} x = 0 \\ 3x - 4 = 0 \end{cases} \qquad 3x = 4 \qquad x = \frac{4}{3}$$

c) As raízes da função $y = x^2 - 5x + 6$ são 2 e 3, pois fazendo $y = 0$, tem-se:

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \qquad \begin{cases} a = 1 \\ b = -5 \\ c = 6 \end{cases}$$

Substituindo na fórmula de Báskara, obtém-se:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4.1.6}}{2.1}$$

$\mathbf{x' = 2}$

$\mathbf{x'' = 3}$

Exercícios

34. Dada a função f: R $\longrightarrow$ R, $f(x) = x^2 + 3x + 5$, calcule:

a) f(2)

b) f(0)

c) f(–1)

35. Encontre as raízes das funções abaixo:

a) $y = 4x^2 - 64$

b) $y = 7x^2 - 9x$

c) $y = x^2 - 9x + 20$

36. Determine a quantidade de raízes das funções abaixo:

a) $f(x) = x^2 - 7x + 10$

b) $f(x) = x^2 - 6x + 9$

c) $f(x) = x^2 + x + 4$

37. Duas populações, designadas por F e G, têm os respectivos crescimentos expressos por $f(t) = 36 + t^2$ e $g(t) = 10 + t^2$, onde **t** é número não negativo que representa o tempo em meses.

a) Calcule a população F e G, quando t = 10.

b) Calcule o crescimento de cada população durante o 5.º mês a partir do início da contagem.

Vértice de uma parábola

Dada a parábola $y = ax^2 + bx + c$, a abscissa do vértice (x_v) é dada por:

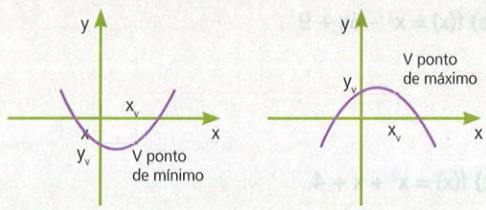
$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

A ordenada do vértice (y_v) é obtida substituindo o valor de "x_v" na função quadrática ou aplica-se a relação:

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a}$$

Onde $\Delta = b^2 - 4ac$

Se a concavidade da parábola é para cima, dizemos que o vértice desta é o ponto de mínimo. Se a concavidade é voltada para baixo, dizemos que o vértice desta é o ponto de máximo.



Exercícios

38. Determine as coordenadas do vértice das parábolas representadas pelas funções:

a) $y = x^2 - 2x + 3$

b) $y = x^2 + 4x + 1$

c) $y = -x^2 + 6x + 2$

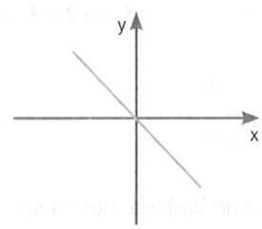
39. (PUCCAMP-SP) Considere a função dada por $y = 3t^2 - 6t + 24$, na qual **y** representa a altura, em metros, de um móvel, no instante **t**, em segundos. O valor mínimo dessa função ocorre para **t** igual a:

a) –2
b) –1
c) 0
d) 1
e) 2

Testes

43. Assinale a alternativa incorreta:

a) Uma parábola determinada por $f(x) = ax^2 + bx + c$ tem concavidade voltada para baixo se $a < 0$.
b) A função identidade faz um ângulo de 45° com o eixo das abscissas.
c) A função $f(x) = 2x^2 - x + 1$ não corta o eixo x.
d) As raízes da função $y = x^2 - 7x + 10$ são –5 e –2.
e) A reta abaixo é determinada pela função $y = ax + b$ com $b = 0$ e $a < 0$.



44. Sendo as funções $f(x) = x^2 - 5x + 4$ e $g(x) = 3x + 4$ o valor de $f(4) + g(2)$ é:

a) 10
b) 20
c) –10
d) –20
e) 30

45. Um banco paga as contas de um cliente segundo a relação $S(c) = \frac{-5c}{3} + 45$, onde S(c) é o saldo do cliente e c é o dia do mês. Em qual dia do mês o saldo é nulo?

a) 25
b) 26
c) 27
d) 28
e) 29

46. Dada a função $f(x) = mx + n$, conhecendo-se $f(0) = 2$ e $f(1) = 3$, então o valor de **m** e **n** é:

a) 1 e 2
b) 2 e 1
c) 3 e 1
d) 2 e 3
e) 0 e 1

Dica: $f(0) = m \cdot 0 + n = 2 \rightarrow n = 2$
$f(1) = m \cdot 1 + n = 3 \rightarrow m = 1$)

47. Os pontos de intersecção das curvas dadas pelas equações $y = x^2 - 13x + 12$ e $y = x - 1$ são:
a) (1, 0) e (0, 1)
b) (13, 12) e (12, 13)
c) (5, 3) e (3, 5)
d) (2, 1) e (13, 12)
e) (0, 0) e (0, 1)

48. A função $y = x^2 - 5x + 6$ corta o eixo **x** em:
a) $x' = 5, x'' = 6$
b) $x' = 0, x'' = 3$
c) $x' = 2, x'' = 3$
d) $x' = 1, x'' = 4$
e) $x' = 0, x'' = 6$

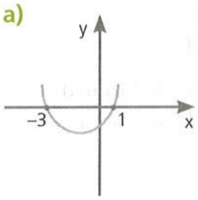
49. O vértice da parábola $y = -x^2 + 4x + 5$ é:
a) v (2, 9)
b) v (5, –1)
c) v (–1, –5)
d) v (0, 0)
e) v (1, 3)

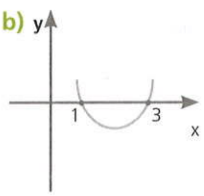
50. A equação $3x^2 - 5x + 8 = 0$:
a) Possui 3 raízes diferentes.
b) Possui 2 raízes iguais e uma terceira diferente.
c) Possui 2 raízes diferentes.
d) Possui 1 raiz.
e) Não possui raízes.

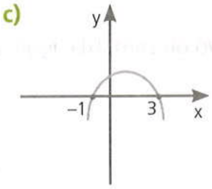
51. (UNESP) Suponha que um grilo, ao saltar do solo, tenha sua posição no espaço descrita em função do tempo (em segundos) pela expressão $h = 3t - 3t^2$. Onde **h** é a altura atingida em metros.
a) Em que instante **t** o grilo retorna ao solo?

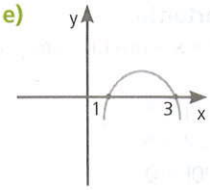
b) Qual a altura máxima, em metros, atingida pelo grilo?

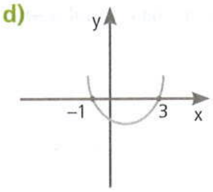
52. (PUC) O gráfico de $y = -x^2 + 4x - 3$ é:

a)


b)


c)


e)


d)


Dica: As raízes de $-x^2 + 4x - 3 = 0$ são 1 e 3 – com concavidade voltada para baixo.

53. (UNIFENAS-MG) Uma fábrica produz $p(t) = t^2 + 2t$ pares de sapatos **t** horas após o início de suas atividades diárias. Se a fábrica começa a funcionar às 8 horas da manhã, entre 10 e 11 horas serão produzidos:
a) 7 pares de sapatos.
b) 8 pares de sapatos.
c) 15 pares de sapatos.
d) 23 pares de sapatos.
e) 25 pares de sapatos.

Desafio

Três amigos foram almoçar em um restaurante e cada um pediu um prato que custava 9 reais (cada prato). Na hora de pagar, cada um entregou para o garçom 10 reais. Chegando ao caixa, o gerente deu um desconto e devolveu 5 reais ao garçom. Este, ao trazer o troco, guardou 2 reais, entregando apenas 3 reais de troco aos clientes; 1 real para cada um. Com isso o total do almoço foi de 27 reais mais os 2 reais que o garçom guardou, totalizando 29 reais. Como eles entregaram 30 reais ao garçom, está faltando 1 real. Onde ele está?

Equações modulares

Módulo de um número real

O módulo ou valor absoluto de um número real **x**, que se indica por |x|, é definido por:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geq 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Portanto:

I. Se **x** é um número positivo ou zero, $|x|$ é igual a **x**.

Exemplos:

a) $|3| = 3$

b) $|5| = 5$

c) $|0| = 0$

II. Se **x** é um número negativo, $|x|$ é igual a **–x**.

Exemplos:

a) $|-5| = -(-5) = 5$

b) $|-3| = -(-3) = 3$

c) $\left|-\frac{1}{2}\right| = -\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

O módulo de um número real qualquer "nunca" é negativo.

Equações modulares

Considere a seguinte situação:

Um vendedor de remédios recebe um salário fixo, mais uma comissão do total das vendas que faz durante o mês. No ano passado, teve um rendimento total de R$ 68 000,00. Neste ano, este total apresentou uma diferença de R$ 6 500,00 em relação ao ano anterior.

O que devemos fazer para determinar o total de rendimentos desse vendedor neste ano, se não sabemos se a diferença é a mais ou a menos?

Resolução:

Se considerarmos **R** como sendo o rendimento do ano passado, teremos duas possíveis situações:

I. **R** – 68 000 = 6 500

II. 68 000 – **R** = 6 500

Para representarmos essas duas equações e considerando a diferença de R$ 6 500,00 como valor absoluto, podemos utilizar uma equação com a incógnita em módulo.

|**R** – 68 000 = 6 500

Portanto, equações modulares são aquelas em que a incógnita aparece dentro dos módulos.

Resolução:

R – 68 000 = 6 500
R = 6 500 + 68 000 ou
R = 74 500

R – 68 000 = –6 500
R = –6 500 + 68 000
R = 61 500

Portanto, esse vendedor terá duas opções de rendimentos para este ano, R$ 74 500,00 se a diferença for para mais ou R$ 61 500 se a diferença for para menos.

São exemplos de equações modulares:

a) $|x| = 3$

Resolução:

$x = 3$ ou $x = -3$

Portanto, a solução da equação é $S = \{-3, 3\}$.

b) $|x| = -2$

A equação não tem solução, pois o módulo de um número nunca é negativo. Indica-se $S = \varnothing$.

c) $|x - 3| = 7$

Resolução:

$x - 3 = 7$	$x - 3 = -7$
$x = 7 + 3$	$x = -7 + 3$
$x = 10$	$x = -4$

Portanto, a solução da equação é $S = \{-4, 10\}$.

d) $\left|\frac{x-3}{4}\right| = 2$

Resolução:

$\frac{x-3}{4} = 2$	$\frac{x-3}{4} = 2$
$x - 3 = 8$	$x - 3 = -8$
$x = 8 + 3$	$x = -8 + 3$
$x = 11$	$x = -5$

Portanto, a solução da equação é $S = \{-5, 11\}$.

e) $|2x - 1| = x - 2$

Como o primeiro membro da equação está em módulo e não pode ser negativo, devemos impor a condição: $x - 2 \geq 0$.

Resolução:

$2x - 1 = x - 2$		$2x - 1 = -(x - 2)$
$2x - x = -2 + 1$	ou	$2x - 1 = -x + 2$
$x = -1$		$2x + x = 2 + 1$
		$3x = 3$
		$x = 1$

Como os números –1 e 1 não satisfazem a condição $x - 2 \geq 0$, a equação não tem solução, por isso $S = \varnothing$.

Exercícios

40. Sendo $f(x) = |x - 1|$, calcule:

a) f(4)

b) f(0)

c) f(–3)

41. Resolva cada equação:

a) $|x - 2| = 4$

b) $|x + 1| = -5$

c) $|2x - 1| = 3$

d) $\left|\dfrac{2x - 4}{3}\right| = x$

e) $|7x - 4| = 3x - 2$

f) $\left|\dfrac{2x + 2}{5}\right| = x - 4$

Testes

54. Assinale a alternativa incorreta.

a) O valor da expressão $|2 - 3| + |4 - 7|$ é igual a 4.

b) A solução da equação $|x - 3| = 2$ é $S = \{-1, -5\}$.

c) A equação $|x + 5| = 3$ tem como solução o conjunto $\{-2, -8\}$.

d) $|-4| = |4|$.

e) A equação $|x| = 3$ tem 2 soluções 3 e -3.

55. Determine o valor numérico da expressão $|x^3 - 2x| + |2x - 7|$, quando $x = -2$:

a) 15

b) -15

c) 23

d) 1

e) -23

56. Quando $f(x) = |3x - 2|$, o valor de $f(-3) + f(-2)$ é igual a:

a) 15

b) 17

c) 19

d) -17

e) -19

57. Resolvendo a equação $\left|\dfrac{2x - 6}{4}\right| = 3$, obtém-se:

a) $\{3, 9\}$

b) $\{-3, 9\}$

c) $\{-9, -3\}$

d) $\{9\}$

e) $\{3\}$

58. A equação $|2x - 4| = x + 3$ tem:

a) Uma única solução.

b) Duas soluções positivas.

c) Duas soluções negativas.

d) Uma solução positiva e outra negativa.

e) Não apresenta solução no campo dos reais.

59. A solução da equação $|3x - 4| = 5x - 10$ é:

a) $S = \{-3, 3\}$

b) $S = \left\{\dfrac{7}{4}, 3\right\}$

c) $S = \{3\}$

d) $S = \{3, 7\}$

e) $\varnothing$

60. A equação $|5 - x| = 3 - 2x$ apresenta:

a) uma única solução;

b) duas soluções positivas;

c) duas soluções negativas;

d) uma solução positiva e outra negativa;

e) não apresenta solução no campo dos reais.

Desafio

Um caracol resolve escalar a parede de um poço de 12 m. A cada dia ele sobe 3 m e escorrega 2 m. Quantos dias ele vai demorar para chegar ao topo do poço?

Equações exponenciais

Para resolvermos as equações exponenciais devemos conhecer as propriedades de potenciação a seguir:

I. $a^0 = 1 \ (a \neq 0)$

II. $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m} \ (a \neq 0)$

III. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^{m}$

IV. $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$

V. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

VI. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

São equações exponenciais as que apresentam uma ou mais incógnitas no expoente.

Exemplos:

a) $2^x = 8$

b) $3^{x+2} = 27$

c) $2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$

1.º caso: São equações que podem ser representadas na forma $a^m = a^n$, em que apenas igualamos os expoentes **m = n**.

Exemplos:

- Resolver as equações:

a) $2^x = 8$

Resolução:

Transformamos a igualdade dada em potências de mesma base e igualamos os expoentes.

$2^x = 8$

$2^x = 2^3$

$x = 3$

Portanto, a solução da equação é S = {3}.

b) $3^{x+2} = 27$

Resolução:

$3^x + 2 = 27$

$3^x + 2 = 3^3$

$x + 2 = 3$

$x = 3 - 2$

$x = 1$

Portanto, a solução da equação é S = {1}.

Exercícios

42. Resolva as equações exponenciais:

a) $2^{x-1} = 8$

b) $3^{x+1} = 81$

c) $5^{2x-1} = 125$

d) $7^{x-4} = 1$

e) $8^{2x-6} = 1$

f) $2^{x+4} = \frac{1}{8}$

g) $10^{x+2} = 1\,000$

h) $4^{x+2} = 32$

i) $10^{x-3} = 0{,}001$

j) $8^{x-1} = 0{,}25$

43. (UNOPAR-PR) Numa cultura de bactérias existem, inicialmente, 1 000 bactérias presentes e a quantidade após **t** minutos é $N(t) = 1\,000 \cdot 3^{0,7t}$. A quantidade de bactérias presentes ao final de 10 minutos é:

a) inferior a 1 000 000;
b) igual a 1 000 000;
c) um valor entre 1 000 000 e 2 000 000;
d) igual a 2 000 000;
e) superior a 2 000 000.

2.º caso: São equações que necessitam de algumas transformações e artifícios.

Exemplos:

- Resolver as equações:

a) $2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$

Resolução:

Devemos fazer com que todas as potências fiquem com o mesmo expoente, para isso, faremos uma pequena transformação.

$2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$

$(2^x)^2 - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$

Substituindo $2^x = \mathbf{m}$, teremos a seguinte equação do 2.º grau:

$\mathbf{m}^2 - 5\mathbf{m} + 4 = 0$

Resolvendo a equação, encontramos as raízes:

$$\begin{cases} m' = 4 \\ m'' = 1 \end{cases}$$

Sabendo que $2^x = m$, temos:

I.	II.
$2^x = m$	$2^x = m$
$2^x = 4$	$2^x = 1$
$2^x = 2^2$	$2^x = 2^0$
$x = 2$	$x = 0$

Portanto, a solução da equação é $S = \{0, 2\}$.

b) $3^{x-2} + 3^{x+1} = 28$

Resolução:

Aplicaremos as propriedades das potências, usadas na matemática básica e revisadas no início das equações, para deixarmos as potências com os mesmos expoentes.

$$3^{x-2} + 3^{x+1} = 28$$

$$\frac{3^x}{3^2} + 3^x \cdot 3^1 = 28$$

$$\frac{3^x}{9} + 3 \cdot 3^x = 28$$

Fazendo $3^x = \mathbf{m}$, e resolvendo a equação do 1.º grau, teremos:

$$\frac{3^x}{9} + 3 \cdot 3^x = 28$$

$$\frac{m}{9} + 3m = 28$$

$$\frac{m + 27m = 252}{9}$$

$$28m = 252$$

$$m = \frac{252}{28}$$

$$m = 9$$

Sabendo que $3^x = \mathbf{m}$, temos:

$3^x = m$

$3^x = 9$

$3^x = 32$

$x = 2$

Portanto, a solução da equação é $S = \{2\}$.

Exercícios

44. Resolva cada equação exponencial:

a) $2^x + 2^{x+1} = 12$

b) $3^{x-1} + 3^x = 36$

c) $3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$

d) $2^{2x} - 3 \cdot 2^x - 4 = 0$

Testes

61. Assinale a alternativa incorreta:

a) O valor de x na equação $2^{x+3} = 8$ é zero.

b) O valor de y na equação $3^{4y-2} = 1$ é $\frac{1}{2}$.

c) O valor de m na equação $3^{2m-1} = 243$ é 3.

d) Se $7^{x^2-2} = 1$, então x vale $\pm\sqrt{2}$.

e) A solução da equação $3^{x^2-5} = 81$ é 3.

62. Encontre x na equação $2^{3x-2} = \frac{1}{32}$.

a) 1
b) –1
c) 2
d) –2
e) $\frac{1}{2}$

63. Resolva $3^{x-1} + 3^{x+2} = 28$:

a) x = –3
b) x = –2
c) x = –1
d) x = 0
e) x = 1

64. Resolva a equação $2^{x+1} + 2^{x-1} = 10$.

a) x = 1
b) x = 0
c) x = 2
d) x = 3
e) x = –4

65. Qual o valor de x em $729^{2x} = 27$?

a) 1/5
b) 1/4
c) 5
d) 4
e) 8

66. Resolvendo a equação $9^{x+3} = 27x$, encontramos **x** igual a:

a) 6
b) –6
c) 4
d) 3
e) 2

67. (UFV-MG) As soluções da equação exponencial $3^{2x} - 12 \cdot 3^x + 27 = 0$ são:

a) –1 e 2
b) 1 e –2
c) 0 e 1
d) 1 e 2
e) 0 e 2

68. (FEI-SP) A equação $2^x + 2^{1-x} = 3$ tem duas raízes. O produto delas é:

a) –1
b) 0
c) 1
d) 2
e) 3

69. (FGV-SP) Estima-se que daqui a **t** anos o valor de uma fazenda seja igual a 500 (3^t) milhares de reais. Após dois anos, a valorização (aumento de valor) em relação a hoje será:

a) 4 milhões de reais.
b) 3,5 milhões de reais.
c) 2 milhões de reais.
d) 1,5 milhão de reais.
e) 1 milhão de reais.

70. (Fatec-SP) Suponhamos que a população de uma certa cidade seja estimada, para daqui a x anos, por $f(x) = \left(20 - \frac{1}{2^x}\right)$ habitantes. Estima-se que durante o terceiro ano essa população:

a) se manterá constante;
b) aumentará de até 125 habitantes;
c) aumentará de até 250 habitantes;
d) diminuirá de até 125 habitantes;
e) diminuirá de até 250 habitantes.

Logaritmos

Resenha histórica

Logaritmo (do grego *logos* = estudo, razão, proporção e *arithmos* = números).

A palavra logaritmo apareceu pela primeira vez na obra *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* (*Uma descrição da maravilhosa regra dos logaritmos*), escrita por John Neper ou John Napier (1550-1617).

Neper não era nenhuma estrela de alguma constelação universitária. Proprietário rural na Escócia, barão e um homem polêmico, afirmava que o papa era o anticristo.

A sua obra supracitada foi publicada após 20 anos de minucioso e criterioso trabalho. Tinha por escopo servir à Navegação e à Astronomia. O matemático e astrônomo francês Pierre de Laplace (1749-1827), assim se reportava aos logaritmos: "ao encurtarem o trabalho, dobraram a vida dos astrônomos". Se hoje os logaritmos possuem uma importância bem menor, deve-se à eclosão das calculadoras e dos computadores. Estes, porém, seriam máquinas muito limitadas se não houvesse logaritmos, uma vez que muitas operações são efetuadas com a tábua de logaritmos que integra os *softwares*.

Em 1615, Henry Briggs, professor de Geometria de Oxford, empreendeu uma longa viagem à Escócia e visitou John Neper em sua casa. Conta o historiador F. Cajori que o encontro foi emocionante: levaram 15 minutos se abraçando, sem dizer uma palavra.

Briggs propôs o uso da base 10, dada uma maior facilidade nos cálculos. Em 1617, Briggs publicou o seu *Logarithmorum Chilias Prima*, que constitui a primeira tábua de logaritmos decimais, no caso de 1 a 1 000 e com 14 casas decimais.

Sete anos mais tarde, Briggs, em *Arithmetica Logarithmica*, efetua os cálculos dos logaritmos decimais de 1 a 20 000 e de 90 000 a 100 000. Nesse livro, pela primeira vez, apareceram as palavras **mantissa** e **característica**.

As tábuas logarítmicas lograram grande êxito, pois ensejavam enorme facilidade nos cálculos aritméticos.

Desconhecida de Neper, a chamada base dos logaritmos neperianos foi representada pela letra e por Euler (1707-1783) e supõe-se ser a letra inicial da palavra exponencial (por causa do limite exponencial cujo resultado é o próprio e) ou mesmo como uma autorreferência ao seu nome: Euler.

$$\text{A base } e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots = 2{,}7182\ldots$$

Disponível em: <www.geometriaanalitica.com.br> Acesso em: 23 abr. 2010.

Introdução

Vamos considerar a seguinte questão:

Qual o número que se deve elevar o número 2 para se obter 8?

A resposta obtida é o número 3.

A esse número 3 chamamos de logaritmo do número 8 na base 2, e indicamos por $\log_2 8 = 3$.

Definição

Dados dois números reais positivos **a** e **b**, com **a** $\neq$ **1**, denominamos logaritmo de **b**, na base **a**, ao número real **x** que se deve elevar à base **a**, para se obter o número **b**.

$$\log_a b = x \leftrightarrow a^x = b \begin{cases} b > 0 \\ a > 0 \text{ e } a \neq 1 \end{cases}$$

Nomenclatura

$$\begin{cases} b \longrightarrow \text{logaritmando (antilogaritmo)} \\ a \longrightarrow \text{base} \\ x \longrightarrow \text{logaritmo} \end{cases}$$

Importante saber

Aos logaritmos que possuem base 10, chamados logaritmos decimais, podemos omitir a base, ou seja, para representarmos $\log_{10} 3$, podemos utilizar apenas $\log 3$.

Exercício resolvido

01. Calcule o valor dos logaritmos, aplicando a definição:

a) $\log_2 16$

Resolução:

$\log_2 16 = x$

$2^x = 16$

$2^x = 2^4$

$x = 4$

Portanto, o logaritmo de 16 na base 2 é o número 4.

b) $\log 0{,}01$

Resolução:

Como dissemos, quando a base é omitida, seu valor é 10, portanto:

$\log_{10} 0{,}01 = x$

$10^x = 0{,}01$

$10^x = \dfrac{1}{100}$

$10^x = \dfrac{1}{10^2}$

$10^x = 10^{-2}$

$x = 2$

Portanto, o logaritmo de 0,01 na base 10 é o número –2.

Consequências da definição

I. $\log_a 1 = 0$

II. $\log_a a = 1$

III. $\log_a a^n = n$

IV. $\log_a m = \log_a n \leftrightarrow m = n$

V. $a^{\log_a b} = b$

Exercícios

45. Calcule:

a) $\log_2 8$

b) $\log_3 81$

c) $\log_7 1$

d) $\log_{\sqrt{2}} 64$

e) $\log_{10} 1\,000$

f) $\log 0{,}001$

g) $\log_2 0{,}25$

46. Resolva:

$\log_3(2x - 1) = 2$

47. Calcule a soma:

$S = \log_2 16 + \log_3 \dfrac{1}{9}$

48. (UFSCAR-SP) A altura média do tronco de certa espécie de árvore, que se destina à produção de madeira, evolui, desde que é plantada, segundo o seguinte modelo matemático:

$h(t) = 1{,}5 + \log_3 (t + 1)$;

Com h(t) em metros e **t** em anos, se uma dessas árvores foi cortada quando seu tronco atingiu 3,5 m de altura, o tempo (em anos) transcorrido do momento da plantação até o do corte foi de:

a) 9
b) 8
c) 5
d) 4
e) 2

Condição de existência dos logaritmos

De acordo com a definição dos logaritmos, temos:

$$\log_a b \rightarrow \begin{cases} b > 0 \\ a > 0 \text{ e } a \neq 1 \end{cases}$$

Exercício resolvido

01. Determine a condição de existência (domínio) da função $y = \log_2 (2x - 6)$:

Resolução:

Como $b > 0$, temos:

$2x - 6 > 0$

$2x > 6$

$x > \dfrac{6}{2}$

$x > 3$

Portanto, o domínio é $D = \{x \in R \,/\, x > 3\}$.

Exercício

49. Determinar o domínio das funções:

a) $y = \log_5(x - 4)$

b) $y = \log (2x - 6)$

c) $y = \log_4 (-x + 5)$

d) $\log_{3x+4} 10$

e) $\log_{4x-10} 8$

Testes

71. Assinale a alternativa falsa:

a) $\log_2 64 = 6$

b) $\log_a 1 = 0$

c) $\log_6 6 = 1$

d) $\log_9 \left(\frac{1}{27}\right) = \frac{3}{2}$

e) $\log_{\sqrt{8}} 4 = \frac{4}{3}$

72. $\log_{625} \sqrt{5}$

a) 3/8
b) 5/8
c) 1/4
d) 1/8
e) 4/5

73. A soma $\log_2 8 + \log_2 16$ é igual a:

a) 7
b) 3
c) 4
d) –4
e) 6

74. Determine o valor numérico da expressão $\log_{10} 0{,}001 + \log_3 3\sqrt{3} - \log_8 1$:

a) –3/5
b) 4/5
c) –4/5
d) 1/3
e) –3/2

75. Determine o domínio da função $y = \log_3 (x + 2)$:

a) $D = \{x \in R / x < 2\}$

b) $D = \{x \in R / x < -2\}$

c) $D = \{x \in R / x \geq 2\}$

d) $D = \{x \in R / x \geq -2\}$

e) $D = \{x \in R / x > -2\}$

76. (FESP) A expressão $\log_2 16 - \log_4 32$ é igual a:

a) 1/2
b) 3/2
c) 1
d) 2
e) 2/3

77. Determine o domínio da função $y = \log_{4x-3} 2$:

a) $\{x \in R / x > \frac{3}{4} \text{ e } x \neq 1\}$

b) $\{x \in R / x < \frac{3}{4} \text{ e } x \neq -1\}$

c) $\{x \in R / x \geq \frac{3}{4} \text{ e } x \neq 1\}$

d) $\{x \in R / x \leq \frac{3}{4} \text{ e } x \neq -1\}$

e) $\{x \in R / x > \frac{4}{3} \text{ e } x \neq 0\}$

Propriedade dos logaritmos

Para quaisquer valores reais de **a**, **b** e **c** positivos e **a** diferente de 1, temos:

- Logaritmo de um produto:

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

- Logaritmo de um quociente:

$$\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

- Logaritmo de uma potência:

$$\log_a b^n = n \cdot \log_a b$$

- Caso particular do logaritmo de uma potência:

$$\log_a \sqrt[n]{b} = \log_a b^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \log_a b$$

- Cologaritmo:

$$\text{colog}_a b = -\log_a b$$

Exercício

50. Dados log 2 = 0,30 e log 3 = 0,48, calcule:

a) log 6
b) log 18
c) log 72
d) log 5,4

Importante saber

Podemos utilizar os logaritmos e suas propriedades na resolução de equações exponenciais quando as mesmas apresentarem bases diferentes.

Exemplo:

Dado log 2 = 0,30 e log 3 = 0,47, determine o valor de **x** na equação $2^x = 3$.

Resolução:

$2^x = 3$

$\log 2^x = \log 3$

$x \cdot \log 2 = \log 3$

$x = \dfrac{\log 3}{\log 2}$

$x = \dfrac{0,47}{0,30}$

$x = 1,56$

Equações logarítmicas

São equações que contêm a incógnita no logaritmando ou na base do logaritmo.

Para sua resolução, podemos seguir a seguinte sequência:

- Indicar a condição de existência.
- Resolver a equação.
- Fazer a verificação das soluções com a condição de existência.

Exercícios resolvidos

01. Resolva a equação $\log_3(\log_5 x) = 0$:

CE: $x > 0$ $\quad \log_5 x > 0$

Resolução:

$\log_5 x = 3^0$

$\log_5 x = 1$

$x = 5^1$

$x = 5$

Aplicando a CE

$5 > 0$ e $\log_5 5 = 1 > 0$

Portanto, S = {5}

02. Resolva a equação $\log_4(x - 4) + \log_4(x + 4) = 2$:

CE: $x - 4 > 0 \quad x + 4 > 0$

$x > 4 \quad x > -4$

Portanto, $x > 4$

Resolução:

$\log_4(x - 4) + \log_4(x + 4) = 2$

$\log_4(x^2 - 16) = 2$

$x^2 - 16 = 16$

$x^2 = 32$

$x = \pm\sqrt{32}$

$x = \pm 4\sqrt{2}$

Como $x = -4\sqrt{2}$ é menor que 4, então não atende à CE, por isso $S = \{4\sqrt{2}\}$.

Exercícios

51. Resolva as equações:

a) $\log_2(\log_3 x) = 0$

b) $\log_2 x + \log_2 x^2 = 6$

c) $\log_2(x + 1) + \log_2(x - 1) = 3$

52. Calcule o valor de $\log_8 7 \cdot \log_6 8 \cdot \log_7 6$.

Mudança de base

$$\log_a b = \frac{\log_m b}{\log_m a}$$

Sendo:

$$\begin{cases} b > 0 \\ a > 0 \text{ e } a \neq 1 \\ m > 0 \text{ e } m \neq 1 \end{cases}$$

Exercício

53. Dado $\log_{10} 2 = 0,30$, calcule:

a) $\log_{100} 8$

b) $\log_{1000}16$

Testes

78. Dado log 2 = 0,30 e log 3 = 0,47, determine o valor dos logaritmos nas questões abaixo e assinale a alternativa incorreta:

a) $\log 8 = 0{,}90$

b) $\log 24 = 1{,}37$

c) $\log 15 = 1{,}17$

d) $\text{colog}_5 125 = -3$

e) $\log_4 10 = -\log_{10}4$

79. Resolvendo a equação $\log_3(4x - 11) = 0$, obtemos x igual a:

a) 4

b) 3/2

c) 3

d) 7/2

e) 9/4

80. A solução da equação $\log_8 x + \log_8 (3x - 2) = 1$ é igual a:

a) –4/3

b) –3

c) –2

d) 2

e) 4/3

81. Se $\log_2 x + \log_4 x = 1$, então:

a) $x = \sqrt[3]{2}$

b) $x = \sqrt[3]{4}$

c) $x = \sqrt{2^3}$

d) $x = 3\sqrt[3]{2}$

e) $x = 2$

82. O produto $\log_3 2 \cdot \log_2 5 \cdot \log_5 3$ é igual a:

a) 0

b) 1

c) 1/5

d) 1/3

e) 1/2

83. O valor da expressão $\log_3 5 \cdot \log_{25} 27$ é:

a) 2/3

b) 3/2

c) 2

d) 3

e) 1/3

84. Determine, aproximadamente, o valor de $\log_6 15$:

a) 1,51

b) 1,57

c) 1,63

d) 1,71

e) 1,90

Cálculos

Respostas

Exercício 01:
a) {1, 2, 3, 4, 5}; b) {3, 5, 6, 7, 8}; c) {3, 5}; d) {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}; e) {1, 2, 4}; f) {6, 7, 8}.

Exercício 02:
a) {5, 6, 7}; b) {1, 2, 3}; c) ∅; d) {1, 2, 3, 4}; e) {8, 9}; f) {4, 5, 6, 7, 8, 9}; g) {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}.

Exercício 03: 10

Exercício 04: 110

Exercício 05: 610

Desafio 01: n = 20

Exercício 06:

a) 

b) 

c) 

d) 

Exercício 07:

a) 

b) 

c) 

d) 

Exercício 08:

a) 

b) 

Exercício 09:
a) $\{x > 0\}$
b) $\{x \leq 1\}$
c) $\left\{x \leq -\frac{3}{2}\right\}$
d) $\left\{x < \frac{9}{4}\right\}$

Exercício 10:

a) 

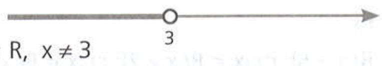
$2 \leq x \leq 3$

b) 

$x < 1$ ou $x > 0$

c) 

$0 < x < 2$

d) 

$x \in R,\ x \neq 3$

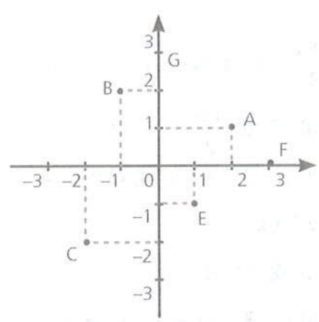
e) 

$1 \leq x \leq 2$

f)

∅

Exercício 11:



Exercício 12:
A (6, 1); B (1, 6); C (–4, 3); D (–3, 2); E (–5, –5); F (2, –3); G (5, –4); H (–1, 0); I (0, 4)

Exercício 13:
A X B {(0, 3), (0, 7), (1, 3), (1, 7), (2, 3), (2, 7)}

Exercício 14:
a) {(2, 0), (2, 1), (2, 5), (7, 0), (7, 1), (7, 5)}
b) {(0, 2), (0, 7), (1, 2), (1, 7), (5, 2), (5, 7)}
c) {(2, 2), (2, 7), (7, 2), (7, 7)}

Exercício 15: letras b, d, e

Exercício 16:
a) D = {1, 2, 3} Im = {0, 3}
b) D = {1, 2, 7, 9} Im = {0, 3, 7}

Exercício 17: letras c, d

Exercício 18: a) {1, 2, 3}; b) {2, 4, 6}.

Exercício 19:

a) 12;

b) 0;

c) 6;

d) $x = 2$ ou $x = 3$.

Exercício 20: $x = 5$

Exercício 21: a) 8 cm; b) t = 200 anos.

Exercício 22:

a) $\{x \in R / x \neq 5\}$; b) $\{x \in R / x \neq 2\}$; c) $\{x \in R / x \neq 8\}$;
d) $\{x \in R / x \neq \pm 2\}$; e) $\{x \in R / x \geq 7\}$; f) $\{x \in R / x \geq -3\}$;
g) $\{x \in R / x > 9\}$; h) $\{x \in R / x < 5\}$

Exercício 23: a) 19; b) 13; c) $f(g(x)) = 2x + 5$

Exercício 24: 3

Exercício 25:

a) $10x + 8$; b) $10x + 7$; c) $25x + 18$; d) $4x + 3$.

Exercício 26:

a) $y^{-1} = \dfrac{x + 2}{3}$; b) $f^{-1}(x) = 4x - 1$; c) $y^{-1} = \dfrac{x + 2}{x - 1}$

Exercício 27: a) –5; b) $\dfrac{13}{2}$

Exercício 28: a) $y = 2$; b) $y = 14$; c) $y = -4$.

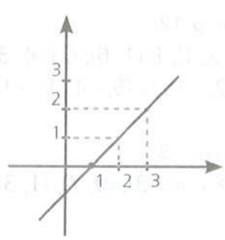
Exercício 29: $y = 6x$

Exercício 30: a) –2; b) –3

Exercício 31: a) $x = 3$; b) $x = 1$; c) $x = 0$.

Exercício 32:

x	1	2	3
y	0	1	3



Exercício 33: a) $h = \dfrac{T}{5}$; b) 6 cm; c) 12 cm.

Exercício 34: a) 11; b) 5; c) 3.

Exercício 35: a) ±8; b) 0 e $\dfrac{9}{7}$ c) 4 e 5

Exercício 36: a) 2; b) 1; c) nenhuma.

Exercício 37: a) $f(10) = 136$ $g(10) = 110$

b) crescimento de F = 9 crescimento de G = 9

Exercício 38: a) (1, 2); b) (–2, –3); c) (3, 11).

Exercício 39: letra d

Exercício 40: a) 3; b) 1; c) 4.

Exercício 41: a) {–2, 6}; b) ∅; c) {–1, 2}; d) $\left\{\dfrac{4}{5}\right\}$

e) ∅; f) $\left\{\dfrac{22}{3}\right\}$

Exercício 42: a) $x = 4$; b) $x = 3$; c) $x = 2$; d) $x = 4$; e) $x = 3$; f) $x = -7$; g) $x = 1$; h) $x = 0$; i) $x = 1/2$; j) $x = 1/3$.

Exercício 43: letra e.

Exercício 44: a) $x = 2$; b) $x = 3$; c) $x' = 1$ $x'' = 0$; d) $x = 0$

Exercício 45: a) 3; b) 4; c) 0; d) –12; e) 3; f) –3; g) –2

Exercício 46: $x = 5$

Exercício 47: $s = 2$

Exercício 48: letra b

Exercício 49: a) $\{x \in R / x > 4\}$; b) $\{x \in R / x > 3\}$;

c) $\{x \in R / x < 5\}$; d) $x > \dfrac{-4}{3}$ e $x \neq -1$ e) $x > \dfrac{5}{2}$ e $x \neq \dfrac{11}{4}$

Exercício 50: a) 0,79; b) 1,26; c) 1,86; d) 0,74

Exercício 51: a) $x = 3$; b) $x = 4$; c) {3}.

Exercício 52: 1

Exercício 53: a) 0,45; b) 0,40.

Gabarito

01) B	02) C	03) A	04) D	05) C	06) C
07) A	08) B	09) B	10) C	11) D	12) A
13) B	14) B	15) D	16) B	17) C	18) B
19) C	20) B	21) A	22) B	23) D	24) D
25) A	26) *	27) B	28) C	29) D	30) E
31) E	32) C	33) C	34) A	35) B	36) C
37) A	38) A	39) D	40) C	41) A	42) C
43) D	44) A	45) C	46) A	47) D	48) C
49) A	50) E	51) *	52) E	53) A	54) B
55) A	56) C	57) B	58) B	59) C	60) A
61) E	62) B	63) E	64) C	65) B	66) A
67) D	68) B	69) A	70) B	71) D	72) D
73) A	74) E	75) E	76) B	77) A	78) E
79) C	80) D	81) B	82) B	83) B	84) A

*26. a) 52 500 habitantes; b) 50 500 habitantes.
*51. a) t = 1s; b) h = 0,75 cm.

Sumário

Matemática 2E

Avaliações

Anotações

Matemática

Trigonometria

O que é a trigonometria?

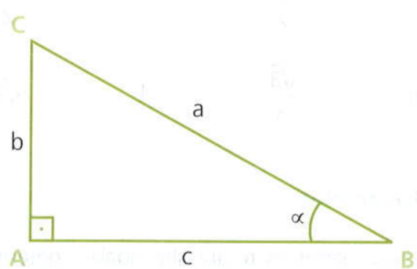
Tri = três
gonos = ângulos
metria = medição

A trigonometria significa a medição de três ângulos.

A necessidade de relacionar distâncias com ângulos foi o que levou astrônomos e topógrafos de diversos povos, como babilônios, gregos, árabes e hindus, a criarem a trigonometria. No entanto, o termo trigonometria apareceu pela primeira vez no livro de Bartholomeu Pitiscus (1561-1613) – *Thesaurus* – publicado em 1613. Sabe-se, porém, que no final do século II a.C., o astrônomo grego **Hisparco de Niceia** construiu a primeira tabela trigonométrica. Graças a esse feito, ele é chamado de **Pai da Trigonometria**.

Triângulo retângulo

Um de seus ângulos internos mede 90°.



Elementos:

$\hat{A} = 90°$

$\hat{B} + \hat{C} = 90°$

$\propto$ = ângulo interno do vértice B

$\overline{BC} = a$ = hipotenusa

$\overline{AB} = c$ = cateto adjacente ao ângulo $\propto$

$\overline{AC} = b$ = cateto oposto ao ângulo $\propto$

Na geometria plana é importante lembrar que o Teorema de Pitágoras diz que em todo triângulo retângulo o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

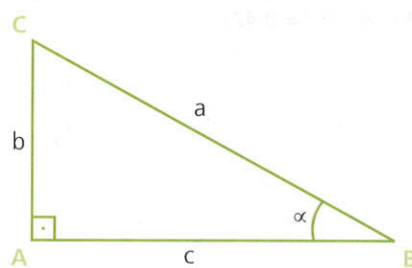
$$a^2 = b^2 + c^2$$

Razões trigonométricas no triângulo retângulo

Num triângulo retângulo, podemos estabelecer razões entre os ângulos e as medidas dos catetos e a hipotenusa.

Estas razões são o **seno** (sen), o **cosseno** (cos) e a **tangente** (tg).

Considere o triângulo retângulo ABC abaixo e o ângulo agudo $\propto$:



Nessas condições, temos:

Seno

É a razão entre o cateto oposto ao ângulo e a hipotenusa.

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{\text{cateto oposto a }\alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

Cosseno

É a razão entre o cateto adjacente ao ângulo $\propto$ e a hipotenusa.

$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto adjacente a }\alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

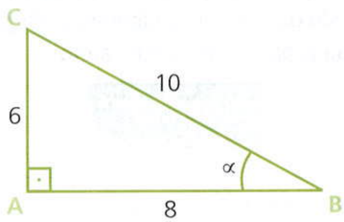
Tangente

É a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente ao ângulo ∝.

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{cateto oposto a }\alpha}{\text{cateto adjacente a }\alpha} = \frac{b}{c}$$

Exemplos:

01. No triângulo retângulo abaixo, determine os valores de sen ∝, cos ∝ e tg ∝:

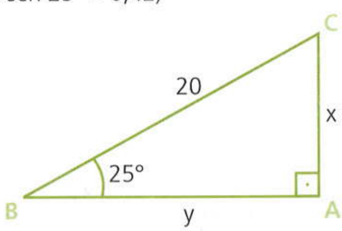


$$\text{sen}\,\alpha = \frac{CO}{H} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\cos\alpha = \frac{CA}{H} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{CO}{CA} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

02. Determine o valor de **x** e **y**, na figura abaixo:
(Dado: sen 25° = 0,42)



$$\text{sen}\,25° = \frac{CO}{H} \qquad \cos 25° = \frac{CA}{H}$$

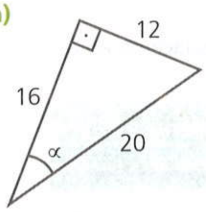
$$0{,}25 = \frac{x}{10} \qquad 0{,}90 = \frac{y}{20}$$

$$x = 5 \qquad y = 18$$

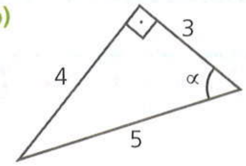
Exercícios

01. Em cada caso, calcule sen ∝, cos ∝ e tg ∝:

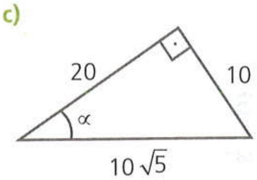
a)



b)



c)



02. Calcule o valor de **x** e **y**, no triângulo abaixo:
(Dado: cos 35° = 0,81; sen 35° = 0,57)

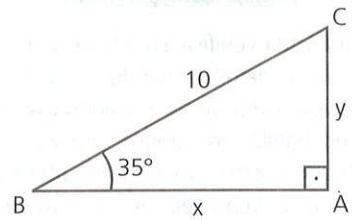


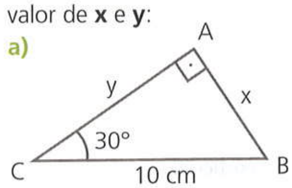
Tabela de valores notáveis

	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

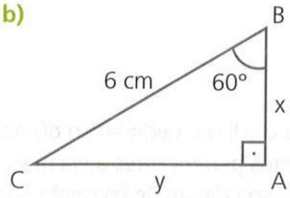
Exercícios

03. Nos triângulos retângulos abaixo, determine o valor de **x** e **y**:

a)

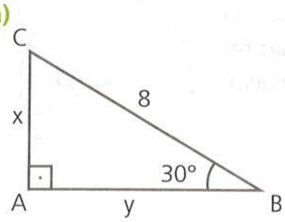


b)

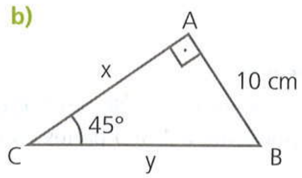


04. Determine os valores de **x** e **y**, nos triângulos retângulos abaixo:

a)



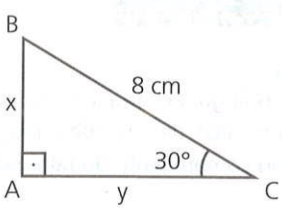
b)



05. (Cesgranrio-RJ) Uma rampa plana de 36 m de comprimento faz ângulo de 30° com o plano horizontal. Uma pessoa que sobe a rampa inteira está a quantos metros do solo?

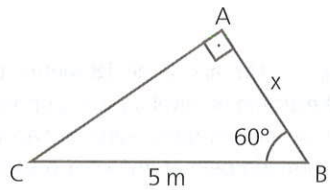
Testes

01. Encontre **x** e **y** na figura abaixo:



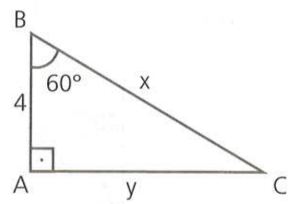
a) $x = 6$ cm; $y = 6\sqrt{3}$ cm
b) $x = 5$ cm; $y = 5\sqrt{3}$ cm
c) $x = 4$ cm; $y = 4\sqrt{3}$ cm
d) $x = 3$ cm; $y = 3\sqrt{3}$ cm
e) $x = 2$ cm; $y = 2\sqrt{3}$ cm

02. Encontre **x** na figura abaixo:



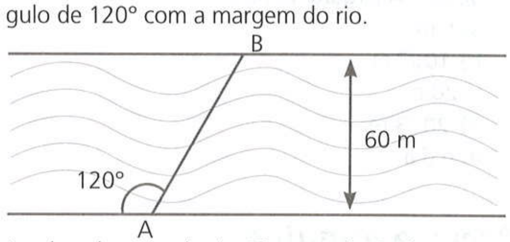
a) 2,5 cm
b) 3,0 cm
c) 3,5 cm
d) 4,0 cm
e) 4,5 cm

03. Os valores de **x** e **y** na figura abaixo são, respectivamente, iguais a:



a) $4\sqrt{3}$ e 4
b) $4\sqrt{3}$ e 5
c) 8 e $4\sqrt{3}$
d) 8 e $5\sqrt{3}$
e) 7 e $6\sqrt{3}$

04. (UFRGS) Um barco parte de A para atravessar o rio. A direção de seu deslocamento forma um ângulo de 120° com a margem do rio.



Sendo a largura do rio 60 m, a distância, em metros, percorrida pelo barco foi de:

a) $40\sqrt{2}$
b) $40\sqrt{3}$
c) $45\sqrt{3}$
d) $50\sqrt{3}$
e) $60\sqrt{3}$

05. (UFPA) Num triângulo retângulo ABC tem-se $\hat{A} = 90°$, AB = 5 e BC = 6. Pede-se a tangente do ângulo B.

a) $\frac{11}{5}$

b) $\frac{\sqrt{11}}{5}$

c) $\frac{6}{5}$

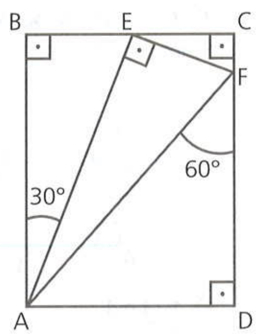
d) $\frac{5}{\sqrt{11}}$

e) $\frac{5}{6}$

06. (Faap-SP) Um arame de 18 metros de comprimento é esticado no nível do solo (suposto horizontal) ao topo de um poste vertical. Sabendo que o ângulo formado pelo arame com o solo é de 30°, calcule a altura do poste.

a) 18 m
b) 36 m
c) 9 m
d) 4,5 m
e) n.d.a.

07. (UTFPR) Se na figura $\overline{AB}$ = 9 cm, o segmento $\overline{DF}$ mede, em cm:



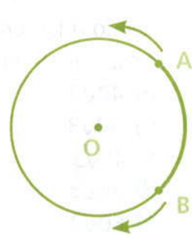
a) 5
b) 4
c) 8
d) 7
e) 6

08. (Unisantos-SP) Uma pessoa na margem de um rio vê, sob um ângulo de 60°, uma torre na margem oposta. Quando ele se afasta 40 m, esse ângulo é de 30°. A largura do rio é:

a) 5 m
b) $10\sqrt{3}$ m
c) 20 m
d) $20\sqrt{3}$ m
e) n.d.a.

Arcos e ângulos

Arcos



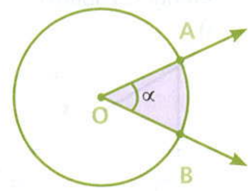
Observe a circunferência ao lado:

Os pontos **A** e **B** dividiram a circunferência em duas partes, que serão denominadas **arcos**.

- De **A** para **B**: $\overset{\frown}{AB}$
- De **B** para **A**: $\overset{\frown}{BA}$

Circunferência é o lugar geométrico do plano, onde todos os pontos pertencentes a ela possuem uma mesma distância de um único ponto, denominado centro, e o centro O possui uma mesma distância de qualquer ponto da circunferência.

Ângulos



Ângulo é a região do plano limitada por duas semirretas de mesma origem. Observe a figura:

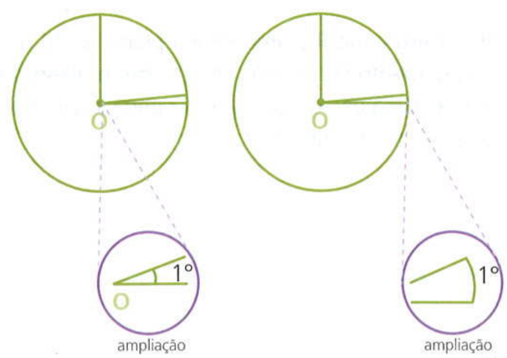
O: vértice
$\overrightarrow{OA}$: semirreta
$\overrightarrow{OB}$: semirreta

Compare a figura acima com a figura que conceitua **arcos**. Observe a diferença entre **arco** e **ângulo**.

Medidas de arcos e ângulos

- **Sistema sexagesimal**

O **grau** (°) é o equivalente a 1/90 de um **ângulo reto** ou o **arco** correspondente a 1/360 partes da circunferência.



1° equivale a 60′
1′ equivale a 60″
1° = 3 600″

- **Sistema circular**

O **radiano** (rad) é o ângulo central (vértice na origem) que subtende um arco de circunferência, cujo comprimento é igual ao comprimento do raio da mesma circunferência.

Sendo $2\pi R$ o comprimento de uma circunferência de raio R e sendo R o comprimento do arco de **um radiano** dessa circunferência, o número de radianos nela contidos é $\frac{2\pi R}{R}$ ou 2π. Então:

$$360^\circ = 2\pi \text{ rd} \longrightarrow 180^\circ = \pi \text{ rd}$$

Conversão das medidas angulares

- **Graus para radianos**

Multiplica-se o ângulo em graus pela fração $\frac{\pi}{180}$.

- Radianos para graus

Substitui-se π rad por 180°.

Exemplos:

a) Transforme 60° em radianos:

$$60^\circ = \cancel{60} \cdot \frac{\pi}{\cancel{180}} = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

b) Transforme $\frac{\pi}{6}$ em graus:

$$\frac{\pi}{6} \text{ rad} = \frac{180^\circ}{6} = 30^\circ$$

Exercícios

06. Converta para radianos:

a) 30°

b) 120°

c) 210°

07. Converta para graus:

a) $\frac{\pi}{3}$ rad

b) $\frac{\pi}{4}$ rad

c) $\frac{3\pi}{2}$ rad

08. Encontre o menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às 15 horas e 20 min.

Leitura Complementar

Eratóstenes e a esfericidade da Terra

Alexandria, no Egito, às margens do Mediterrâneo, reinou quase absoluta não só como a cidade mais eclética e cosmopolita da época, mas também como principal centro da cultura mundial no período do séc. III a.C. ao séc. IV d.C.

Sua famosa Biblioteca continha praticamente todo o saber da Antiguidade, com cerca de 700 000 rolos de papiros e pergaminhos. Seu lema era "adquirir um exemplar de cada manuscrito existente na face da Terra".

Era frequentada pelos mais conspícuos sábios, poetas e matemáticos. Sua destruição talvez tenha representado o maior crime contra a ciência e a cultura em toda a história da humanidade. Foi vítima das chamas provocadas pela insanidade belicosa dos Romanos (Júlio César em 47 a.C.) e pela intolerância religiosa (bispo Teófilo em 392 d.C. e califa Omar em 640 d.C.).

Eratóstenes (276-194 a.C.), que foi diretor deste notável Templo do Saber, comprovou, pela trigonometria, a esfericidade da Terra e mediu com engenhosidade e relativa precisão o perímetro de sua circunferência.

Num dos rolos de papiro, encontrou a informação de que na cidade de Siena (hoje Assuã), ao meio-dia do solstício de verão (o dia mais longo do ano, 21 de junho, no Hemisfério Norte), o Sol se situava a prumo, pois iluminava as águas profundas de um poço. Entretanto, o nosso geômetra observou que, no mesmo horário e dia, as colunas verticais da cidade de Alexandria projetavam uma sombra perfeitamente mensurável.

Aguardou o dia 21 de junho do ano seguinte e determinou que se instalasse uma grande estaca em Alexandria. Ao meio-dia, enquanto o Sol iluminava as profundezas do poço em Siena (fazia ângulo de 90° com a superfície da Terra), em Alexandria Eratóstenes mediu o ângulo $\theta = 7°12'$, ou seja, 1/50 dos 360° de uma circunferência. Portanto, o comprimento do meridiano terrestre deveria ser 50 vezes a distância entre Alexandria e Siena.

Por tais cálculos, conjecturou que o perímetro da Terra seria de 46 250 km. Hoje sabemos que é de 40 076 km.

Precedeu a experiência um feito digno de nota: Alexandria e Siena situavam-se a grande, porém, desconhecida distância. Para medi-la, Eratóstenes determinou que uma equipe de instrutores com seus camelos e escravos a pé seguissem em linha reta, percorrendo desertos, aclives, declives e tendo que, inclusive, atravessar o rio Nilo. Distância mensurada: 5 000 estádios ou cerca de 925 km. Ademais, as cidades de Alexandria e Siena não estão sobre o mesmo meridiano como supunha Eratóstenes, havendo uma diferença de quase 3°.

Eratóstenes, além de matemático, geógrafo e diretor da reverenciada Biblioteca, foi poeta, escritor, astrônomo e atleta. Por ter transitado simultaneamente em várias atividades e tendo sido contemporâneo de Arquimedes, Aristófanes de Bizâncio, Aristarco e Apolônio de Perga, não conseguiu ser o maioral em nada. Por isso, recebeu a alcunha de "Beta" (2.ª letra do alfabeto grego), com a qual os seus patrícios reconheciam o seu valor, mas admitindo que havia alguém – um alfa – melhor que ele.

Aos 82 anos, já cego e pressentindo o ocaso da vida, deixou de alimentar-se. Morreu de inanição.

Disponível em: <www.geometriaanalitica.com.br>
Acesso em: 23 abr. 2010.

Testes

09. Assinale a alternativa incorreta:

a) $45° = \frac{\pi}{4}$ rad

b) $\frac{2\pi}{3}$ rad $= 120°$

c) $\frac{5\pi}{2}$ rad $= 450°$

d) $15° = \frac{\pi}{24}$ rad

e) $12° = \frac{\pi}{15}$ rad

10. Transformando 22°30' em radianos, teremos:

a) $\frac{\pi}{4}$ rad

b) $\frac{\pi}{8}$ rad

c) $\frac{\pi}{16}$ rad

d) $\frac{3\pi}{4}$ rad

e) $\frac{3\pi}{8}$ rad

11. (PUC) Dar o menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às 12 horas e 15 minutos.

a) 90°
b) 85°
c) 82°30'
d) 80°
e) 75°30'

12. Transformando $\frac{3\pi}{5}$ rad em graus, obtemos:

a) 54°
b) 36°
c) 72°
d) 108°
e) 136°

13. (UFPA) Quantos radianos percorrem o ponteiro dos minutos de um relógio em 50 minutos?

a) $\frac{16\pi}{9}$

b) $\frac{5\pi}{3}$

c) $\frac{4\pi}{3}$

d) $\frac{10\pi}{3}$

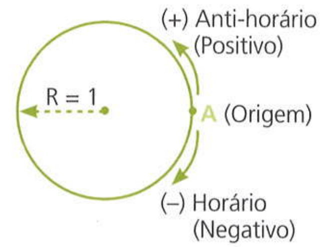
e) $\frac{7\pi}{3}$

14. (OSEC-SP) Dar o menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às 9 horas e 10 minutos.

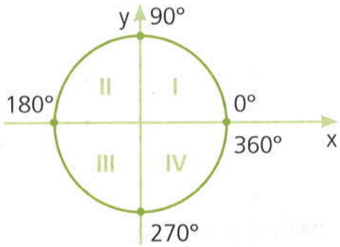
a) 120°
b) 130°
c) 145°
d) 150°
e) 165°

Circunferência trigonométrica

Circunferência trigonométrica é a circunferência de raio unitário (R = 1), um ponto de origem dos arcos (ponto A) e um sentido de percurso (anti-horário).



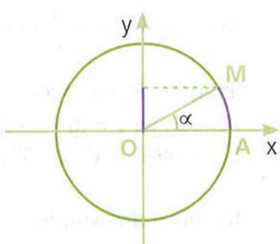
Considerando o centro dessa circunferência coincidindo com o centro do sistema de eixos cartesianos, adota-se a divisão em quadrantes e os sinais destes.



Quadrante	Graus	Radianos
I	$0° \longrightarrow 90°$	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$
II	$90° \longrightarrow 180°$	$\frac{\pi}{2} \longrightarrow \pi$
III	$180° \longrightarrow 270°$	$\pi \longrightarrow \frac{3\pi}{2}$
IV	$270° \longrightarrow 360°$	$\frac{3\pi}{2} \longrightarrow 2\pi$

Função seno

Seja um arco $\widehat{AM}$ de medida α, denominamos sen α ao valor da ordenada do ponto M.



Indica-se:

sen $\widehat{AM}$ = sen α = $\overline{OP}$

Portanto, todos os valores do seno serão representados no eixo das ordenadas (eixo y).

$$-1 \leq \text{sen}\,\alpha \leq 1$$

Se a projeção **P** da extremidade do arco $\widehat{AM}$ estiver situada acima de **O**, o seno será positivo, e se estiver abaixo de **O**, será negativo.

Portanto, o **seno** será positivo no 1.º e no 2.º quadrantes e negativo no 3.º e 4.º quadrantes.

Sinais:

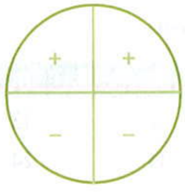
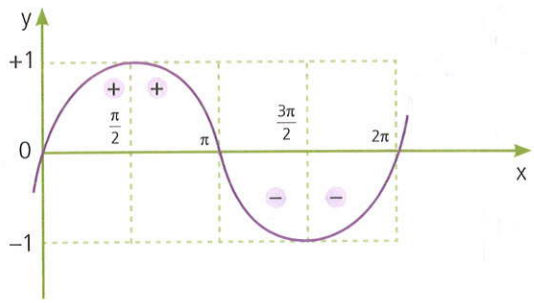


Gráfico da função do seno:

Senoide



Resumo:

A função seno é contínua e limitada.

Domínio de y = sen $\alpha \longrightarrow \alpha \in$ R

Imagem de y = sen $\alpha \longrightarrow -1 \leq y \leq +1$

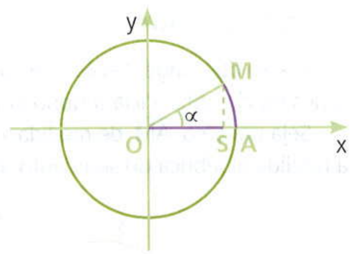
Período de y = sen $\alpha \longrightarrow p = 2\pi$

Crescente: 1.º e 4.º Q

Decrescente: 2.º e 3.º Q

Função cosseno

Seja um arco $\widehat{AM}$ de medida α, denominamos cos α ao valor da abcissa do ponto M.



Indica-se:

sen $\widehat{AM}$ = sen α = $\overline{OS}$

Portanto, todos os valores do cosseno serão representados no eixo das abscissas (eixo x).

$$-1 \leq \cos \leq 1$$

Se a projeção **P** da extremidade do arco $\widehat{AM}$ situar-se à direita de **O**, o cosseno será positivo, e se situar-se à esquerda de **O**, será negativo.

Portanto, o **cosseno** será positivo no 1.º e 4.º quadrantes e negativo no 2.º e 3.º quadrantes.

Sinais:

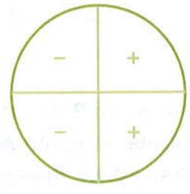
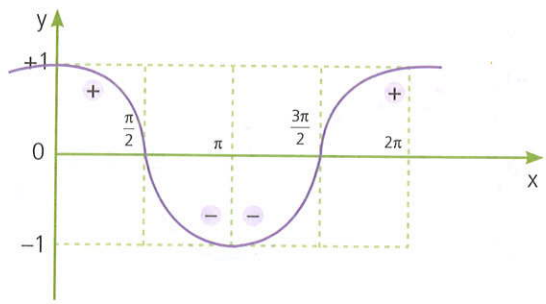


Gráfico de função do cosseno:

Cossenoide



Resumo:

A função cosseno é contínua e limitada.

O domínio, imagem e período de y = cos ∝ são os mesmos de y = sen ∝.

Domínio ⟶ ∝ ∈ IR

Imagem ⟶ $-1 \le y \le +1$

Período ⟶ $p = 2\pi$

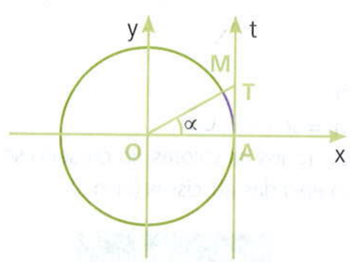
Crescentes: 3.° e 4.° Q

Decrescentes: 1.° e 2.° Q

Função tangente

O eixo das tangentes é um eixo paralelo ao eixo dos senos na circunferência trigonométrica.

Seja um arco $\overset{\frown}{AM}$ de medida ∝, denominamos tg ∝ a medida algébrica do segmento $\overset{\frown}{AT}$.



Indica-se:

tg $\overset{\frown}{AM}$ = tg ∝ = $\overset{\frown}{AT}$

Portanto, todos os valores da tangente serão representados no eixo t.

A variação da função tangente vai de −∞ a +∞.

Observe que a projeção **P** da extremidade do arco $\overset{\frown}{AM}$ está situada acima do ponto **A**, sendo, então, a tangente positiva, e se estiver abaixo, negativa.

Portanto, a tangente é **positiva** no 1.° e no 3.° quadrantes e **negativa** no 2.° e 4.° quadrantes.

Sinais:

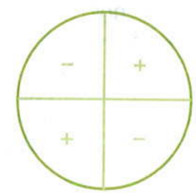
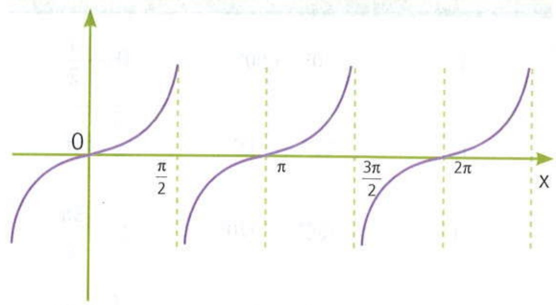


Gráfico da função tangente:

Tangentoide



Resumo:

Domínio de y = tg ∝ é:

$$D = \left\{ \alpha \in IR \; / \; \alpha \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in Z \right\}$$

Imagem de y = tg ∝ ⟶ $-\infty < y < +\infty$

Período de y = tg ∝ ⟶ $p = \pi$

Crescente ⟶ 1°, 2°, 3° e 4° Q.

Resumo dos sinais:

	1.° Q	2.° Q	3.° Q	4.° Q
sen cossec	+	+	−	−
cos sec	+	−	−	+
tg cotg	+	−	+	−

Mesmos sinais:

sen e cossec	cos e sec	tg e cotg

Para memorizar:

	SE	TA	CO
+	12	13	14
−	34	24	23

Relações fundamentais e relações inversas

As relações que apresentaremos a seguir são de extrema importância em todo o nosso estudo, fazendo-se necessário, portanto, memorizá-las.

Relações inversas

- Cossecante

Inverso da função seno.

$$\text{cossec}\,\alpha = \frac{1}{\text{sen}\,\alpha}$$

- Secante

Inverso da função cosseno.

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$

- Cotangente

Inverso da função tangente.

$$\text{cotg}\,\alpha = \frac{1}{\text{tg}\,\alpha}$$

Relações fundamentais

No triângulo retângulo, utilizando o Teorema de Pitágoras e as razões trigonométricas, podemos deduzir outras fórmulas:

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \begin{cases} \cos^2\alpha = 1 - \text{sen}^2\alpha \\ \text{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \end{cases}$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} \qquad \text{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\alpha}$$

Relações derivadas

$$\sec^2\alpha = 1 + \text{tg}^2\alpha \qquad \text{cossec}^2\alpha = 1 + \text{cotg}^2\alpha$$

Exercícios

09. Encontre o sinal da expressão

$$y = \frac{\text{sen}\,x \,.\, \cos x \,.\, \text{cotg}\,x}{\text{tg}\,x}, \text{ sendo } x \in 2.^\circ \text{ Q}.$$

10. Dado $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, com $x \in 1.^\circ$ Q, encontre as demais funções trigonométricas (seno, tangente, secante, cossecante e cotangente).

11. Dado $\text{sen}\,x = \frac{3}{5}$, com $x \in 2.^\circ$ Q, encontre as demais funções trigonométricas.

12. Utilizando as relações fundamentais e as relações inversas, simplifique as expressões:

a) $\text{tg}\,x \,.\, \cos x - \text{sen}\,x$

b) $\text{cotg}\,x \,.\, \text{sen}\,x \,.\, \cos x + \text{sen}^2\,x$

c) $\text{tg}^2\,x \,.\, \cos^2 x + \text{cotg}^2\,x \,.\, \text{sen}^2\,x$

d) $\dfrac{\cos x}{1 - \text{sen}^2 x} - \sec x$

13. Calcule o valor da expressão:

$$y = \frac{\cos 90^\circ + 2 \,.\, \text{sen}\,90^\circ - \text{tg}\,180^\circ}{\cos 180^\circ + \text{sen}\,270^\circ}$$

Testes

15. A alternativa que representa a resposta certa, respectivamente, é:

1. $\text{sen}\, x < 0$ e $\text{tg}\, x < 0$
2. $\text{sen}\, x < 0$ e $\sec x < 0$
3. $\cos x > 0$ e $\text{cotg}\, x > 0$

a) 4.º, 2.º e 3.º
b) 4.º, 3.º e 3.º
c) 2.º, 4.º e 3.º
d) 4.º, 1.º e 3.º
e) 4.º, 3.º e 1.º

16. Sabendo-se que sen $\alpha < 0$ e tg $\beta < 0$, podemos afirmar que:

a) α e β pertencem ao 1.º quadrante.
b) α pertence ao 1.º e β ao 3.º quadrante.
c) α e β pertencem ao 4.º quadrante.
d) α pertence ao 3.º ou 4.º quadrante e β ao 2.º ou 4.º quadrante.
e) α pertence ao 3.º e β ao 4.º quadrante.

17. (UEPG-PR) O quadrante em que a tangente, a cotangente, a secante e o cosseno são negativos é o:

a) 1.º
b) 2.º
c) 3.º
d) 4.º
e) n.d.a.

18. Determine o valor numérico da expressão:

$$M = \frac{\text{sen}\, 90° + \cos 0° + \text{sen}\, 270° \,.\, \cos 180°}{\cos 360° + \text{sen}\, 180°}$$

a) 1
b) 2
c) 3
d) –1
e) –2

19. (MACKENZIE-SP) Se $x = \frac{\pi}{2}$ então

$$\frac{\text{sen}\, x + 2\,\text{cotg}\left(\frac{x}{2}\right) - \cos 2x}{\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right) \,.\, \text{cossec}\, x + \sec 4x}$$ é igual a:

a) – 2
b) 0
c) 1/2
d) 2
e) 4

20. (PUC) O valor numérico da expressão $y = \cos 4x + \text{sen}\, 2x + \text{tg}\, 2x - \sec 4x$ para $x = \frac{\pi}{2}$ é:

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

21. Simplificando $\frac{\text{sen}\, m \,.\, \text{tg}\, m \,.\, \text{cossec}\, m}{\cos m \,.\, \text{cotg}\, m \,.\, \sec m}$ obtém-se:

a) 0
b) $\sec^2 m$
c) $\text{sen}^2 m$
d) 1
e) $\text{tg}^2 m$

22. (UFCE) Para todo x pertencente ao intervalo $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, a expressão $\frac{\text{cossec}^2 x \,.\, \text{tg}\, x}{\sec^2 x}$ é igual a:

a) tg x
b) sec x
c) cossec x
d) cotg x
e) n.d.a.

23. Simplifique a expressão $y = \frac{\text{tg}\, x}{\text{cotg}\, x} \cdot \frac{\cos^2 x}{\text{sen}^2 x}$:

a) $\text{sen}^2 x$
b) 1
c) $\text{sen}^2 x \,.\, \cos^2 x$
d) $\cos^2 x$
e) $\text{tg}^2 x$

24. Sendo $\text{sen}\, x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, com $x \in$ 1.º Q, encontre o valor do cos x:

a) $\sqrt{2}$
b) $\frac{1}{2}$
c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
e) n.d.a.

25. Sabendo que $\cos x = \frac{1}{2}$ com $x \in$ 4.º quadrante, encontre o valor de sen x .

a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
e) n.d.a.

26. Dado $\text{sen } x = \frac{5}{13}$, com $x \in$ 2.° quadrante, determine o valor de tg x.

a) $-\frac{12}{5}$

b) $\frac{12}{5}$

c) $\frac{5}{12}$

d) $-\frac{5}{12}$

27. (PUC-SP) Sabendo que cossec $x = \frac{5}{4}$ e x é do primeiro quadrante, calcule o valor da expressão $25\ \text{sen}^2x - 9\ \text{tg}^2x$.

a) $-\frac{25}{16}$

b) $\frac{-5}{16}$

c) $-\frac{125}{64}$

d) $\frac{-5}{16}$

e) 0

28. (PUC-PR)

Se $m = \frac{4\ \text{sen}^2x}{\text{sen}^2 2x}$ e $n = \frac{\cos x \cdot \text{tg } x}{\text{sen } x}, x \neq k\pi, k \in Z$,

então m – n é igual a:

a) cossec^2x

b) $\sec^2x$

c) cotg^2x

d) tg^2x

e) 1

Desafio

Uma garrafa e sua rolha custam R$ 1,10, a garrafa custa mais R$ 1,00 do que a rolha. Quanto custa a rolha? Quanto custa a garrafa?

Arcos complementares

Sejam α e β dois ângulos complementares ($\alpha + \beta = 90°$) pertencentes ao 1.° quadrante, então:

$\text{sen } \alpha = \cos \beta$ | $\sec \alpha = \text{cosec } \beta$ | $\text{tg } \alpha = \text{cotg } \beta$

Exemplos:

$\text{sen } 30° = \frac{1}{2}$ e $\cos 60° = \frac{1}{2}$, portanto:

$\text{sen } 30 = \cos 60°$

Em que 30° e 60° são arcos complementares.

Exercício

14. Utilizando a propriedade dos arcos complementares, calcule:

a) sen 65° =

b) cos 50° =

c) tg 80° =

d) sec 73° =

e) cossec 60° =

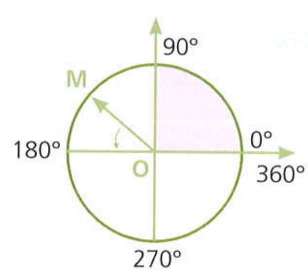
f) cotg 65° =

Redução ao 1.° quadrante

Reduzir um arco do 2.° Q, 3.° Q ou 4.° Q ao 1.° Q é obter um novo arco, entre 0° e 90° (1.° Q), que possui os mesmos valores para as funções trigonométricas que o arco dado ao mesmo sinal.

Método

Arco no 2.° quadrante



- Quanto falta para 180°?
- Verifique o sinal da função.

Exercício

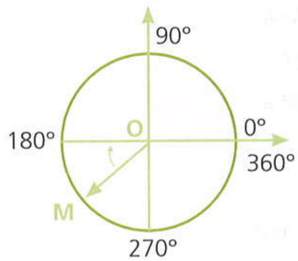
15. Reduza ao 1.º quadrante:

a) sen 120°

b) cos 150°

c) tg 135°

Arco no 3.º quadrante



- Quanto passa de 180°?
- Verifique o sinal da função.

Exercício

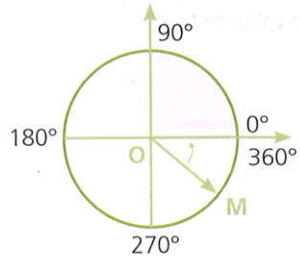
16. Reduza ao 1.º quadrante:

a) sen 210°

b) cos 240°

c) tg 225°

Arco no 4.º quadrante



- Quanto falta para 360°?
- Verifique o sinal da função.

Exercício

17. Reduza ao 1.º quadrante:

a) sen 300°

b) cos 330°

c) tg 315°

Menor determinação de um arco

Um arco, cujo valor ultrapassa 360°, é representado na circunferência trigonométrica por um certo número múltiplo de 360° (que representa o número de voltas completas que o arco percorre) somado a outro número, menor que 360°, que é a menor determinação desse arco.

Veja, como exemplos, os arcos de 750° e 390°:

- 750° = 720° + 30°
  - 720° ↓ 2 . 360° (2 voltas completas)
  - 30° ↓ M. D. (Menor determinação)
- 390° = 360° + 30°
  - 360° ↓ 1 . 360° (1 volta completa)
  - 30° ↓ M. D. (Menor determinação)

Para calcularmos a menor determinação de um arco dividimos este por 360°. O quociente é o valor que representa o número de voltas completas e o resto é a menor determinação dos arcos.

Nos casos anteriormente mencionados.

$$\begin{array}{r|l} 750° & 360° \\ \hline 30° & 2 \text{ (voltas completas)} \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 390° & 360° \\ \hline 30° & 1 \text{ (volta completa)} \end{array}$$

$\hookrightarrow$ menor determinação $\qquad$ $\hookrightarrow$ menor determinação

Importante saber

- Os arcos de 390° e 750° são denominados arcos côngruos a 30°, porque suas menores determinações são iguais.
- Se o arco for negativo e maior que 360°, procedemos da mesma forma e somamos a menor determinação (negativa) com 360°.
- Eventualmente, a menor determinação de um arco deve ser reduzida ao 1.° quadrante.

Testes

29. Assinale a alternativa incorreta.

a) $\cos 120° = -\dfrac{1}{2}$

b) sen 200° = cos 70°

c) sen 1 920° = cos 30°

d) $\text{tg } 300° = -\sqrt{3}$

e) A menor determinação positiva do arco de 1 000° é 280°.

30. Assinale a alternativa correta.

a) A menor determinação positiva do arco de 800° é 100°.

b) $\cos\dfrac{15\pi}{4} = \cos\dfrac{3\pi}{4}$

c) sen 70° = cos 20°

d) sec 80° = cossec 20°

e) tg 850° = – tg 130°

31. (FEI-SP) Calcular o valor de $\text{sen}\dfrac{7\pi}{2} \cdot \cos 31\pi$:

a) 0
b) 1
c) –1
d) 2
e) –2

32. (PUC) Qual dos pares de ângulos é côngruo de 120°?

a) –240° e 1 920°
b) 330° e 1 500°
c) 200° e 600°
d) –100° e 0°
e) n.d.a.

33. (Cescea-SP) O valor da expressão cos 150° + sen 300° – tg 225° – cos 90° é:

a) $-\sqrt{3} - 1$
b) $-\sqrt{3} + 1$
c) $\sqrt{3} - 1$
d) $\sqrt{3} + 1$
e) $\dfrac{-\sqrt{3} - 3}{2}$

34. Sendo $x = \dfrac{2\pi}{3}$, calcule o valor da expressão $y = \dfrac{3\cos x - 2\,\text{sen } x + \text{tg } 2x}{\text{tg } x - 2\,\text{sen } 2x + \cos 4x}$ ·

a) –3
b) 3
c) 3/2
d) 3/4
e) –3/4

35. (PUC-SP) O valor de sen 1 200° é igual a:

a) cos 60°
b) –sen 60°
c) cos 30°
d) –sen 30°
e) cos 45°

36. (Fatec-SP) Determine o valor numérico da expressão representada por

$$y = 3\text{tg}^2\frac{13\pi}{4} - 2\,\text{sen}\frac{\pi}{4} \cdot \text{cossec}\frac{3\pi}{4}:$$

a) 2
b) 1
c) 0
d) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
e) $\sqrt{2}$

37. Qual o valor numérico da expressão $\dfrac{\text{sen } 45° \cdot \text{sen } 60° + \cos 810°}{\text{tg } 405° - \text{sen } 270°}$:

a) 0
b) $\sqrt{6}$
c) $\dfrac{\sqrt{6}}{8}$
d) $2\sqrt{3}$
e) 1

Operações com arcos

Adição de arcos

Conhecidos os arcos **a** e **b**, calcular as funções trigonométricas da forma (a + b) e (a – b).

- Seno da soma e diferença de dois arcos

$\text{sen}\,(a \pm b) = \text{sen}\,a\,.\,\cos b \pm \text{sen}\,b\,.\,\cos a$

- Cosseno da soma e diferença de dois arcos

$\cos\,(a \pm b) = \cos a\,.\,\cos b \pm \text{sen}\,a\,.\,\text{sen}\,b$

- Tangente da soma e diferença de dois arcos

$$\text{tg}\,(a \pm b) = \frac{\text{tg}\,a \pm \text{tg}\,b}{1 \mp \text{tg}\,a\,.\,\text{tg}\,b}$$

Exercícios

18. Calcular sen 15°.

19. Calcular cos 105°.

20. Calcular tg 75°.

21. Encontre o valor de sen $(\pi - x)$:

22. Encontre o valor de $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$:

23. Encontre o valor de tg $(2\pi - x)$:

Duplicação de arcos

$\text{sen}\,2a = 2\,\text{sen}\,a\,.\,\cos a$

$\cos 2a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{2\,\text{tg}\,\alpha}{1 - \text{tg}^2\,a}$$

Variações importantes:

$(\text{sen}\,x \pm \cos x)^2 = 1 \pm \text{sen}\,2x$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$\cos 2x = 1 - 2\,\text{sen}^2\,x$

Exercícios

24. Dado $\cos x = \frac{5}{13}$, calcule sen 2x, $x \in 1.^\circ$ Q.

25. Dado $\text{sen}\,x = -\frac{3}{5}$ com $x \in \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$ determine o valor de cos 2x.

Equações trigonométricas na 1.º volta

Para resolvermos equações trigonométricas, devemos nos centrar em 2 aspectos.

I. Qual é o valor que satisfaz a igualdade no 1.º quadrante (a este valor chamaremos α).

II. Em quais quadrantes se encontram as soluções.

Analisamos este aspecto através dos sinais das funções trigonométricas.

Neste caso (com α sendo solução da equação no 1.º quadrante):

Se $x \in$ 1.º Q $\rightarrow x = \alpha$

Se $x \in$ 2.º Q $\rightarrow x = 180° - \alpha$

Se $x \in$ 3.º Q $\rightarrow x = 180° + \alpha$

Se $x \in$ 4.º Q $\rightarrow x = 360° - \alpha$

Exemplos:

01. Resolva a equação $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$ com $x \in [0, 2\pi]$.

I. O valor no 1.º Q que satisfaz a igualdade é $30° = \frac{\pi}{6}$ rad.

Portanto, $\alpha = 30° = \frac{\pi}{6}$rad.

II. Como o $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$, então as soluções estão no 1.º e 2.º quadrantes (quadrantes onde o seno é positivo), logo:

$x_1 \in$ 1.º Q $\rightarrow x_1 = \alpha$

$x_1 = 30° = \frac{\pi}{6}$rad

$x_2 \in$ 2.º Q $\rightarrow x_2 = 180° - \alpha$

$x_2 = 180° - 30°$

$x_2 = 150° = \frac{5\pi}{6}$rad

Com isso o conjunto solução da equação é

$S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$

02. Resolva a equação $\cos x = -\frac{1}{2}$:

Se a equação apresentar valores negativos, como por exemplo $\cos x = -\frac{1}{2}$, adota-se os mesmos procedimentos, entretanto, para descobrir α ignora-se o sinal.

I. $\cos x = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = 60° = \frac{\pi}{3}$rad.

II. Como o coseno é negativo as soluções se encontram no 2.º e 3.º Q.

Portanto:

$x_1 \in$ 2.º Q $\rightarrow x_1 = 180° - \alpha$

$x_1 = 180° - 60°$

$x_1 = 120° = \frac{2\pi}{3}$rad

$x_2 \in$ 3.º Q $\rightarrow x_2 = 180° + \alpha$

$x_2 = 180° + 60°$

$x_2 = 240° = \frac{4\pi}{3}$rad

Com isso o conjunto solução da equação será

$S = \left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$

Exercício

26. Resolva as equações abaixo com $x \in [0, 2\pi]$:

a) $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos x = \frac{1}{2}$

c) $\operatorname{tg} x = 1$

d) $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}$

e) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

f) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$

Desafio

Você decidiu ir para a cama às 8 horas da noite, na sexta-feira. Após dar corda no relógio, você acertou o despertador para às 9 horas da manhã seguinte. Quantas horas você dormiu?

Testes

38. (PUC) Sendo 15° = 45° – 30°, o valor de cos 15° é:

a) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

b) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

c) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

d) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

e) $\frac{1}{2}$

39. Se sen x = $\frac{3}{5}$, x ∈ 1.° Q. Calcule o valor da tg 2x.

a) $\frac{12}{7}$

b) $\frac{7}{12}$

c) $\frac{12}{25}$

d) $\frac{24}{7}$

e) $\frac{7}{24}$

40. (MACKENZIE-SP) Se sec x = $-\frac{13}{5}$ e $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, então o valor de sen 2x é:

a) $-\frac{12}{13}$

b) $-\frac{120}{169}$

c) $\frac{12}{13}$

d) $\frac{120}{169}$

e) $\frac{125}{144}$

41. (UNIFOR-CE) Lembrando-se de que cos 75° = cos (45° + 30°), o valor de cos 2 985° é igual a:

a) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

b) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

c) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

d) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

e) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

42. (FCC-BA) Sendo a tal que $\frac{3\pi}{2} < a < 2\pi$ e $\cos a = \frac{1}{5}$, o valor de cos 2**a** é:

a) $-\frac{23}{25}$

b) $-\frac{22}{25}$

c) $-\frac{21}{25}$

d) $\frac{22}{25}$

e) $\frac{23}{25}$

43. (FEI-SP) Calcule sen 15° + cos 15°:

a) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

b) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

d) $\frac{2\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

e) n.d.a.

44. Determine o conjunto solução da equação $\sqrt{3}$. tg x = 1 com x ∈ [0, 2π].

a) $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\}$

b) $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}\right\}$

c) $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$

d) $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

e) $\left\{\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}\right\}$

45. Determine o conjunto solução da equação 2 . cos x = 1, para 0 ≤ x ≤ 2π.

a) $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\}$

b) $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$

c) $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

d) $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$

e) $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

46. Encontre o valor do sen (2π + x):

a) sen x

b) cos x

c) tg x

d) – sen x

e) – cos x

47. Encontre o valor do $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$:

a) – cos x

b) – sen x

c) – tg x

d) sen x

e) cos x

48. Encontre o valor da tg (π + x):

a) sen x

b) cotg x

c) – cotg x

d) – tg x

e) tg x

Respostas

Exercício 01:

a) $\text{sen}\,\alpha = \frac{3}{5}$; $\cos\alpha = \frac{4}{5}$; $\text{tg}\,\alpha = \frac{3}{4}$

b) $\text{sen}\,\alpha = \frac{4}{5}$; $\cos\alpha = \frac{3}{5}$; $\text{tg}\,\alpha = \frac{4}{3}$

c) $\text{sen}\,\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$; $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$; $\text{tg}\,\alpha = \frac{1}{2}$

Exercício 02: $x = 8{,}1$; $y = 5{,}7$

Exercício 03: a) $x = 5$ cm; b) $x = 3$ cm.

Exercício 04:

a) $x = 4$ cm
$y = 4\sqrt{3}$ cm

b) $x = 10$ cm
$y = 10\sqrt{2}$ cm

Exercício 05: 18 metros.

Exercício 06: a) $\frac{\pi}{6}$rad; b) $\frac{2\pi}{3}$rad; c) $\frac{7\pi}{6}$rad;

Exercício 07: a) 60°; b) 45°; c) 270°.

Exercício 08: $\alpha = 20°$

Exercício 09: $y < 0$ (negativo)

Exercício 10:

$\text{sen}\,x = \frac{1}{2}$, $\text{tg}\,x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\sec x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\text{cossec}\,x = 2$, $\text{cotg}\,x = \sqrt{3}$

Exercício 11:

$\cos x = -\frac{4}{5}$, $\sec x = -\frac{5}{4}$, $\text{tg}\,x = -\frac{3}{4}$, $\text{cossec}\,x = \frac{5}{3}$, $\text{cotg}\,x = -\frac{4}{3}$

Exercício 12: a) zero; b) 1; c) 1; d) zero

Exercício 13: – 1

Exercício 14:
a) cos 25°; b) sen 40°; c) cotg 10°; d) cossec 17°; e) sec 30°; f) tg 25°.

Exercício 15: a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; c) -1

Exercício 16: a) $-\frac{1}{2}$; b) $-\frac{1}{2}$; c) 1

Exercício 17: a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; c) -1

Exercício 18: $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Exercício 19: $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

Exercício 20: $2 + \sqrt{3}$

Exercício 21: sen x

Exercício 22: – sen x

Exercício 23: – tg x

Exercício 24: $\frac{120}{169}$

Exercício 25: $\frac{7}{25}$

Exercício 26:

a) $x_1 = 60° = \frac{\pi}{3}$rad
$x_2 = 120° = \frac{2\pi}{3}$rad

b) $x_1 = 60° = \frac{\pi}{3}$rad
$x_2 = 30° = \frac{5\pi}{3}$rad

c) $x_1 = 45° = \frac{\pi}{4}$rad
$x_2 = 225° = \frac{5\pi}{4}$rad

d) $x_1 = 210° = \frac{7\pi}{6}$rad
$x_2 = 330° = \frac{11\pi}{6}$rad

e) $x_1 = 135° = \frac{3\pi}{4}$rad
$x_2 = 225° = \frac{5\pi}{4}$rad

f) $x_1 = 120° = \frac{2\pi}{3}$rad
$x_2 = 300° = \frac{5\pi}{3}$rad

Gabarito

01) C	02) A	03) C	04) B	05) B	06) C
07) E	08) C	09) D	10) B	11) C	12) D
13) B	14) C	15) E	16) D	17) B	18) C
19) D	20) A	21) E	22) D	23) B	24) C
25) A	26) D	27) E	28) D	29) B	30) C
31) B	32) A	33) A	34) B	35) C	36) B
37) C	38) C	39) D	40) D	41) B	42) A
43) B	44) A	45) C	46) A	47) D	48) E

Desafios

Vendo que a garrafa custa mais um real do que a rolha, podemos dizer que a rolha custa R$ 0,05 e a garrafa custa R$ 1,05.

1 hora apenas, pois relógio do tipo que se dá corda, não sabe distinguir 9h e 21h.