Sumário

Matemática 7E

Avaliações

Anotações

Matemática

7 E

Análise combinatória

Fotolia

A combinação estuda o número de possibilidades de ocorrência de um determinado acontecimento.

Vamos, agora, citar algumas afirmações sobre certos acontecimentos. Destas afirmações, observamos que algumas são facilmente entendidas, mas outras não, constituindo problemas típicos e clássicos da análise combinatória.

- Ao jogarmos uma moeda para cima, o resultado, quando ela cai, pode ser cara ou coroa (duas possibilidades).
- No lançamento de um dado, podemos ter como resultado 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 (seis possibilidades).
- Com 5 alunos, podemos formar 10 equipes diferentes, cada uma com 2 membros.

Geralmente a **combinatória** é utilizada na indústria e na ciência em todos os níveis e, associada à probabilidade e à estatística, torna-se um instrumento poderoso, responsável, muitas vezes, por tomadas de decisões até na área governamental.

A grande maioria dos problemas que envolvem o cálculo combinatório pode ser reduzido a alguns tipos de problemas básicos que consistem na determinação do número de agrupamentos que podemos formar com determinados elementos.

Princípio fundamental da contagem

Alguns problemas que iremos resolver agora se baseiam no **princípio fundamental da contagem**.

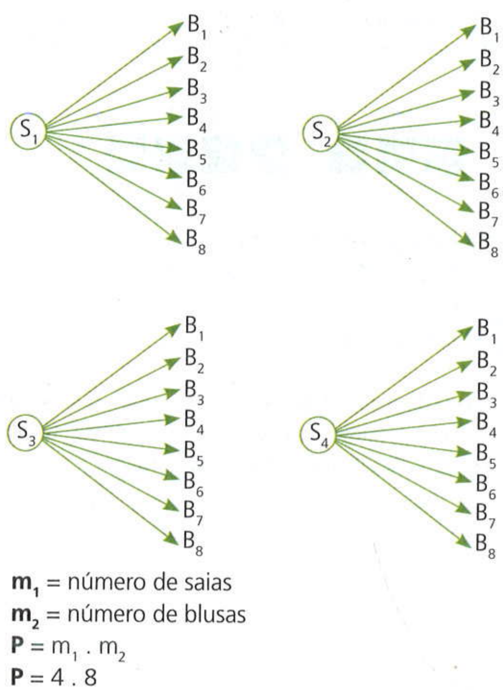
Se um acontecimento é composto de várias etapas sucessivas e independentes umas das outras (**m_1, m_2, m_3,...**), podemos afirmar que o número total de possibilidades é dado por:

$$P = m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \dots \cdot m_k$$

Exercícios resolvidos

1. Uma moça tem 4 saias e 8 blusas. Durante quantos dias poderá sair usando saia e blusa sem repetir o mesmo conjunto?

Abaixo as possibilidades:



m_1 = número de saias
m_2 = número de blusas
P = $m_1 \cdot m_2$
P = 4 . 8
P = 32

Agora, imaginemos a mesma situação apresentada anteriormente, só que com algumas modificações:

2. Uma moça tem 4 saias, 3 calças e 5 camisas. Durante quantos dias poderá sair sem repetir o mesmo conjunto?

Resolução:

Como a moça tem saias e calças, e essas não podem ser usadas juntas, temos uma situação em que ela usa saia ou usa calça. Esse **ou** nos dá uma ideia de adição nos problemas de contagem, pois são duas situações diferentes. Com isso:

3 . 5 = 15 (calça + camisa)

4 . 5 = 20 (saia + camisa)

Total: 35

3. As placas de automóveis possuem 3 letras e 4 números (exemplo: ABC-1234). Supondo a existência de placas na forma AAA-0000, determine:

a) O total de carros que podem ser licenciados.

b) A quantidade de placas pares que começam e terminam com vogal.

Resolução:

a)

letras			números			
L_1	L_2	L_3	N_1	N_2	N_3	N_4
26 .	26 .	26	10 .	10 .	10 .	10

Multiplicando-se as possibilidades obtemos:

26 . 26 . 26 . 10 . 10 . 10 . 10 = 175 760 000

b)

letras			números			
L_1	L_2	L_3	N_1	N_2	N_3	N_4
5 .	26 .	5	10 .	10 .	10 .	5

Multiplicando-se obtemos:

5 . 5 . 26 . 10 . 10 . 10 . 5 = 3 250 000

Exercícios

01. À diretoria de uma empresa concorrem 3 candidatos à presidência e 5 à vice-presidência. Quantas chapas distintas podem ser formadas?

02. Ao jogarmos uma moeda para cima, quantas são as possibilidades distintas de se obter cara na primeira jogada ou coroa na última, uma vez que a moeda é arremessada 3 vezes?

03. Uma bandeira com 5 listras deve ser pintada com 3 cores. Qual é a quantidade de formas diferentes de pintar a bandeira, sabendo que duas listras adjacentes não podem ser pintadas com a mesma cor?

04. Em um shopping center com 3 pisos, para se deslocar de um piso ao outro as pessoas têm quatro opções: 2 escadas rolantes e 2 escadas normais. De quantas maneiras uma pessoa pode se deslocar do 1.º ao 3.º piso? E se o shopping possuísse um elevador, quantas seriam as possibilidades?

Testes

01. (Mackenzie-SP) Se uma sala tem 8 portas, então o número de maneiras distintas de se entrar nela e sair da mesma por uma porta diferente é:

a) 8
b) 16
c) 40
d) 48
e) 56

02. Cinco cavalos disputam um páreo. Qual o número de resultados possíveis para os três primeiros lugares?

a) 60
b) 30
c) 15
d) 10
e) n.d.a.

03. Uma moça possui 5 sapatos e 6 meias. Quantas são as formas em que ela pode usar uma meia e um sapato?

a) 10
b) 20
c) 30
d) 40
e) 60

04. (UFGO) No sistema de emplacamento de veículos, que seria implantado em 1984, as placas deveriam ser iniciadas por 3 letras do nosso alfabeto. Caso o sistema fosse implantado, o número máximo possível de prefixos, usando-se somente vogais, seria:

a) 20
b) 60
c) 120
d) 125
e) 243

05. Quatro times de futebol disputam um torneio. Quantas são as possibilidades de classificação para os 3 primeiros lugares?

a) 24
b) 6
c) 36
d) 60
e) 120

06. (FAAP) Num hospital existem 3 portas de entrada que dão para um amplo saguão, no qual existem 5 elevadores. Um visitante deve dirigir-se ao 6.º andar utilizando-se de um dos elevadores. De quantas maneiras diferentes pode fazê-lo?

a) 8
b) 5
c) 90
d) 30
e) 15

07. Uma bandeira é formada de 7 listras, que devem ser pintadas de 3 cores diferentes. De quantas maneiras distintas será possível pintá-la de modo que duas listras adjacentes nunca estejam pintadas da mesma cor?

a) 156
b) 164
c) 172
d) 180
e) 192

08. (UFRJ) Um construtor dispõe de quatro cores (verde, amarelo, cinza e bege) para pintar 5 casas dispostas lado a lado. Ele deseja que cada casa seja pintada com apenas uma cor e que duas casas consecutivas não possuam a mesma cor. Por exemplo, duas hipóteses de pintura seriam:

verde, amarelo, bege, verde, cinza, verde, cinza, verde, bege, cinza

Determine o número de possibilidades diferentes de pintura.

a) 220
b) 264
c) 284
d) 324
e) 360

Fatorial

Sendo **n** um número inteiro, maior que um (1), define-se fatorial de **n**, que é indicado por **n**!, como sendo o produto de todos os números naturais de 1 até **n**, ou seja:

$$n! = n.\,(n-1).(n-2).(n-3).\;\dots\;.3.2.1$$

Sendo assim, podemos afirmar que:

$2! = 2\,.\,1 = 2$
$3! = 3\,.\,2\,.\,1 = 6$
$4! = 4\,.\,3\,.\,2\,.\,1 = 24$
$5! = 5\,.\,4\,.\,3\,.\,2\,.\,1 = 120$
$6! = 6\,.\,5\,.\,4\,.\,3\,.\,2\,.\,1 = 720$
$7! = 7\,.\,6\,.\,5\,.\,4\,.\,3\,.\,2\,.\,1 = 5\,040$

. . .
. . .
. . .

$n! = n\,.\,(n-1)\,.\,(n-2)\,.\,(n-3)\,.\;\dots\;.3.2.1$

Importante saber

$0! = 1$
$1! = 1$
$6! = 6\,.\,5\,.\,4\,.\,3\,.\,2\,.\,1 = 6\,.\,5\,.\,4\,.\,3\,.\,2! = 6\,.\,5\,.\,4\,.\,3! = \dots$
$4! = 4\,.\,3\,.\,2\,.\,1 = 4\,.\,3\,.\,2! = 4\,.\,3!$
$(n+1)! = (n+1)\,.\,n\,.\,(n-1)\,.\,(n-2)\dots$
$(n+2)! = (n+2)\,.\,(n+1)\,.\,n\,.\,(n-1)\,.\,(n-2)\dots$

Cuidado!

$\frac{6!}{2!} \neq 3!$ $\frac{6!}{2!} = \frac{6.5.4.3.\cancel{2}.\cancel{1}}{\cancel{2}.\cancel{1}} = 360$

$3!\,.\,2! \neq 6!$

$6! = 6\,.\,5\,.\,4\,.\,3\,.\,2\,.\,1 = 720$

$3!\,.\,2! = 3\,.\,2\,.\,1\,.\,2\,.\,1 = 12$

Exercícios

05. Determine os fatoriais indicados abaixo:

a) $\frac{8!}{3!}$

b) $\frac{5!}{3!2!}$

c) $\frac{5!}{3!+2!}$

d) $\frac{50!+49!}{48!}$

e) $(n + 4)! = 120$

f) $(n + 5)! = 1$

g) $\frac{(n+1)!}{n!} = 6$

06. Determine o valor de **x**, sabendo que $(n + 6)! = 8\,(n + 5)!$

Testes

09. Simplifique a expressão $\frac{5!}{4!+2!}$

a) 60

b) 13

c) $\frac{60}{13}$

d) $\frac{13}{60}$

e) n.d.a.

10. (F.M.ABC-SP) Simplifique $\frac{101!+102!}{100!}$

a) 101.103

b) 102!

c) 100 000

d) 101!

e) 10 403

11. Simplifique $\frac{12!}{9!}$

a) 1 320

b) 710

c) 890

d) 460

e) n.d.a.

12. (PUC-SP) Se $(n - 6)! = 720$, então **n** é igual a:

a) 12

b) 576

c) 16

d) 4

e) 30

13. (PUC-PR) A soma da raiz da equação $(5x - 7)! = 1$ vale:

a) 5

b) 7

c) 12

d) 3

e) 4

14. Encontre o valor de **n** sabendo que $(n + 3)! = 6\,(n + 2)!$

a) 6
b) 5
c) 4
d) 3
e) 2

15. Resolvendo a equação $\dfrac{n!}{(n-1)!} = 4$, o valor de $(n! - n)$ é igual:

a) 20
b) 24
c) 28
d) 32
e) 36

16. Resolvendo $(n - 2)! = 20\,(n - 4)!$, obtemos **n** igual a:

a) $n = 1$
b) $n = 2$
c) $n = 5$
d) $n = 7$
e) $n = 8$

Permutação

Seja um conjunto $\mathbf{A} \neq \varnothing$ com **n** elementos. As sucessões formadas com **n** elementos, todos de **A**, usando cada elemento uma só vez em cada agrupamento, são chamadas **permutações** de **n** elementos de **A**.

Portanto, permutação é o tipo de agrupamento ordenado, que em cada grupo entram todos os elementos do conjunto **A**.

Permutação simples

Não aparecem elementos repetidos.

$$P_n = n!$$

Permutações com repetição

$$P_n = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots}$$

Sendo: α, β, γ,... o número de repetições que ocorrem.

Permutações circulares

$$(P_c)_n = (n - 1)$$

Exercícios

07. Quantos números de 5 algarismos distintos podem ser formados, usando-se os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5.

Anagrama é um agrupamento de letras que pode ou não ter sentido.
Exemplo:
Palavra: **bala** – Anagramas: **bala, laba, aabl**...

08. Quantos anagramas podemos formar com as letras das palavras:

a) BOLA.

b) EDITORA, que começam pela letra A.

c) EDITORA, que começam com E e terminam com A.

d) EDITORA, em que as letras DITO aparecem juntas e nesta ordem.

e) EDITORA, em que as letras DITO aparecem juntas.

09. Quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra OTIMISMO?

10. 5 amigos vão ao cinema, mas entre eles têm um casal de namorados que prefere sentar juntos. Se a fila possui 5 assentos, quantas são as possibilidades para eles se acomodarem?

11. De quantas formas diferentes as pessoas podem sentar-se numa mesa circular (mesa com 4 cadeiras)?

Testes

17. Quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra AMOR?

a) 12
b) 24
c) 30
d) 36
e) 40

18. Quantos anagramas da palavra LIVRO começam pela letra L?

a) 120
b) 48
c) 24
d) 12
e) n.d.a.

19. Quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra BANANA?

a) 60
b) 80
c) 120
d) 140
e) 210

20. (UFBA) Quatro jogadores saíram de Manaus para um campeonato em Porto Alegre, num carro com 4 lugares. Dividiram o trajeto em 4 partes e aceitaram que cada um dirigiria uma vez. Combinaram também que, toda vez que houvesse mudança de motorista, todos deveriam trocar de lugar. O número de arrumações possíveis dos 4 jogadores durante toda a viagem é:

a) 4
b) 8
c) 12
d) 24
e) 162

21. (FUVEST-SP) O número de anagramas da palavra FUVEST que começam e terminam com vogal é:

a) 24
b) 48
c) 96
d) 120
e) 144

22. Quantos números ímpares de 7 algarismos, sem repetição, podem ser formados com os dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6?

a) 1 300
b) 1 360
c) 1 420
d) 1 600
e) 1 800

Combinações simples

Seja **A** um conjunto com **n** elementos. Os subconjuntos de **A** com **p** elementos constituem agrupamentos que são chamados de combinações dos **n** elementos de **A**, tomados **p** a **p**.

Combinação é um tipo de agrupamento em que um grupo é diferente do outro apenas pela **natureza** dos elementos componentes.

Sendo:

n = Número de elementos do conjunto.

p = Número de elementos de cada grupo.

Tem-se:

$$C_{n,p} = C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!\,.\,p!} \quad \text{com } n \geq p$$

Não existe repetição de elementos, caso isso aconteça a combinação será dada por:

$C^*_{n+p-1\,.\,p}$

Exercícios

12. Com 5 espécies de frutas, quantos tipos de saladas podem ser feitas contendo, em cada prato, 3 espécies diferentes?

13. Com 5 pessoas, quantas comissões, constituídas de 2 pessoas, podem ser formadas?

14. Num plano temos 8 pontos, sendo 3 nunca colineares. Quantos triângulos podemos formar utilizando sempre 3 pontos como vértices?

15. São colocados sobre uma reta **r** 4 pontos e sobre uma reta **s**, paralela a **r**, coloca-se 5 pontos. Quantos são os quadriláteros que podemos formar com esses pontos? E triângulos, quantos serão?

16. Determine o valor de **n** onde $C_{n,\, n-1} = 6$.

Testes

23. (AMAN-RJ) As diretorias de 4 membros que podemos formar com 10 sócios de uma empresa são:
a) 5 040
b) 40
c) 2
d) 210
e) n.d.a.

24. Com 7 professores, quantas comissões de 3 professores podemos formar?
a) 12
b) 27
c) 23
d) 28
e) 35

25. Os vértices de um decágono determinam quantas retas distintas?
a) 23
b) 27
c) 45
d) 50
e) 60

26. Quantos triângulos ficam determinados, unindo-se os vértices de um decágono?
a) 60
b) 80
c) 100
d) 120
e) 150

27. Encontre o valor de **n** para que $C_{n+1,\, n} = 4$:
a) 3
b) 4
c) 5
d) 6
e) 7

28. (UFSC) Num acampamento estão 14 jovens, sendo 6 paulistas, 4 cariocas e 4 mineiros. Para fazer a limpeza do acampamento, será formada uma equipe com 2 paulistas, 1 carioca e 1 mineiro, escolhidos ao acaso. O número de maneiras possíveis para se formar essa equipe de limpeza é:
a) 96
b) 182
c) 212
d) 240
e) 256

29. (UNEB-BA) Um técnico de basquetebol dispõe de 12 jogadores, 5 dos quais devem ser selecionados para disputar um campeonato. Se Xazam e Heureka não podem ficar fora da equipe selecionada e os demais jogadores jogam em quaisquer posições, o número de equipes que o técnico poderá formar é:
a) 24
b) 60
c) 120
d) 240
e) 720

30. Tomam-se seis pontos sobre uma circunferência. O número total de quadriláteros convexos distintos que podemos formar com esses pontos é:
a) 22
b) 41
c) 15
d) 36
e) 27

Arranjos simples

Seja **A** um conjunto com **n** elementos, as sucessões com p elementos formadas com elementos distintos de **A**, constituem agrupamentos que são chamados de arranjos dos **n** elementos de **A**, tomados **p** a **p**.

Arranjo é o tipo de agrupamento em que um grupo é diferente do outro apenas pela ordem ou pela natureza dos elementos componentes.

Sendo:

n = Número de elementos do conjunto.

p = Número de elementos de cada grupo.

Tem-se:

$$A_{n,p} = A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} \text{ com } n \geq p$$

Não existe repetição de elementos, caso isso aconteça o arranjo será dado por:
$A^*_{n,p} = n^p$

Exercícios

17. Quantos números de 4 algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6?

18. Quantas centenas ímpares podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, sem repeti-los?

19. Quantos números de 4 algarismos distintos podemos formar com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6?

20. Determine o valor de **n** na expressão $A_{n,2} = 3(n-1)$:

Testes

31. Quatro times de futebol disputam um torneio em que são atribuídos prêmios ao campeão e ao vice-campeão. De quantos modos os prêmios podem ser atribuídos?
a) 12
b) 24
c) 30
d) 36
e) 48

32. (FATEC-SP) Há doze inscritos em um campeonato de boxe. O número total de lutas que podem ser realizadas entre os inscritos é:
a) 12
b) 24
c) 33
d) 66
e) 132

33. Sabendo que $A_{x,2} = 5 \cdot (x-1)$, então **x** é:
a) 5
b) 6
c) 8
d) 2
e) 1

34. A partir dos algarismos 1, 3, 5 e 7, quantos números, com dois algarismos distintos, podemos formar?
a) 6
b) 12
c) 24
d) 36
e) 60

35. (PUC-PR) As placas dos automóveis são formadas por duas letras seguidas de 4 algarismos. Calcular o número de placas que podem ser confeccionadas com duas vogais distintas e quatro algarismos diferentes, sendo o algarismo das unidades sempre o 5.
a) 840
b) 60 480
c) 10 800
d) 10 080
e) 524

36. (UEPG-PR) Com os algarismos de 1 a 7, quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar de modo que os números obtidos sejam todos ímpares?

a) 42
b) 20
c) 120
d) 168
e) 60

37. Quantos números ímpares de 3 algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 3, 4, 5, 6 e 7?

a) 40
b) 50
c) 60
d) 70
e) 80

38. (CEETEPS-SP) Para proteger certo arquivo de computador, um usuário deseja criar uma senha constituída por uma sequência de 5 letras distintas, sendo as duas primeiras consoantes e as três últimas vogais. Havendo no teclado 21 consoantes e 5 vogais, o número de senhas distintas do tipo descrito é:

a) 25 200
b) 13 172
c) 5 040
d) 3 125
e) 2 100

Método prático de resolução de problemas em análise combinatória

Analisando o que vimos até agora em análise combinatória, nota-se que o grande problema está na distinção do tipo de solução que devemos dar:

combinação, arranjo ou permutação

Para tal, siga a regra abaixo:

- Encontra-se **n** e **p**.
- Se **n = p**, o problema é de **permutação**.
- Se **n > p** é **combinação** ou **arranjo**.
- Para diferenciar entre um e outro, monte um agrupamento e troque a ordem dos elementos, mantendo a natureza.
- Se o 1.º agrupamento for igual ao 2.º agrupamento, o problema é de **combinação**.
- Se o 1.º agrupamento for diferente do 2.º agrupamento, o problema é de arranjo ou princípio fundamental da contagem.

Testes

39. De quantas maneiras 6 crianças podem formar uma roda?
(Dica: Use a expressão da permutação circular.)

a) 24
b) 48
c) 60
d) 120
e) 720

40. (PUC-PR) As placas dos automóveis são formadas por 3 letras seguidas de 4 algarismos. Com letras e algarismos do conjunto {A, B, C, D, 1, 3, 5, 7, 9}, quantas placas podemos fazer começando com a letra A, podendo repetir as letras, mas sem repetição de algarismos na mesma placa?

a) 4 000
b) 2 880
c) 31 720
d) 1 920
e) 7 680

41. (FCC-BA) Quanto aos anagramas da palavra ENIGMA, sejam as afirmações:
I. O número total deles é 720.
II. O número dos que terminam com a letra A é 25.
III. O número dos que começam com EN é 24.

Assinale a alternativa correta:

a) Só a afirmativa I é verdadeira.
b) A afirmação II é verdadeira.
c) Só a afirmação III é verdadeira.
d) As afirmações I e II são verdadeiras.
e) As afirmações I e III são verdadeiras.

42. (UNESP) O setor de emergência de um hospital conta, para os plantões noturnos, com 3 pediatras, 4 clínicos gerais e 5 enfermeiros. As equipes de plantão deverão ser constituídas por 1 pediatra, 1 clínico geral e 2 enfermeiros. Determine:

a) Quantos pares distintos de enfermeiros podem ser formados.
b) Quantas equipes de plantão, distintas, podem ser formadas.

43. (UEL-PR) Um professor de Matemática comprou dois livros para premiar dois alunos de uma classe de 42 alunos. Como são dois livros diferentes, de quantos modos distintos pode ocorrer a premiação?

a) 861
b) 1 722
c) 1 764
d) 3 444
e) 2^{42}

44. (UTFPR) Numa reunião definida como "Queijos e Vinhos", estavam disponíveis no buffet 8 tipos de queijos e 6 tipos de vinhos. Sabendo que Jaime serve-se de dois tipos diferentes de queijo e um tipo de vinho cada vez que vai ao buffet, o número total de opções distintas para servir-se é:

a) 34
b) 62
c) 42
d) 168
e) 336

45. Com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, quantos números de 600 a 1 000 possuem todos os algarismos distintos?

a) 224
b) 231
c) 234
d) 244
e) 256

46. (UEL-PR) De quantas maneiras distintas pode-se escolher 4 letras diferentes da palavra INDIRETAMENTE?

a) $C_{13,4}$
b) $C_{10,4}$
c) 140
d) 70
e) 35

47. Cinco crianças e um adulto estão em uma sala de espera, onde há apenas um banco de 5 lugares. De quantas maneiras diferentes as crianças podem se sentar, nunca deixando o adulto em pé?

a) 200
b) 400
c) 600
d) 800
e) 1 000

48. (UEPG-PR) Um trem é constituído de uma locomotiva e cinco vagões distintos, um dos quais é um vagão-restaurante. Sabendo-se que a locomotiva deve ir à frente e que o vagão-restaurante não pode ser colocado imediatamente após a locomotiva, o número de modos diferentes em que a composição pode ser montada é igual a:

a) 18
b) 96
c) 120
d) 360
e) 600

49. (FESP) Sobre uma reta marcam-se 5 pontos e sobre outra reta, paralela à primeira, marcam-se 8 pontos. O número de triângulos que obteremos unindo três quaisquer destes 13 pontos é:

a) 156
b) 180
c) 220
d) 350
e) 410

Números binomiais

Dados dois números naturais, **n** e **p**, com **n** $\geq$ **p**, denomina-se número binomial **n** sobre **p** e indica-se por $\binom{n}{p}$, em que:

$$\binom{n}{p} = C_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!}$$

O número **n** é o numerador e **p** o denominador do binomial.

Casos particulares:

I. $\binom{n}{0} = 1, \forall\, n \in N$

II. $\binom{n}{n} = 1, \forall\, n \in N$

III. $\binom{n}{1} = n, \forall\, n \in N \text{ e } n > 1$

Exercício

21. Calcule o valor da expressão:

$$A = \binom{6}{2} + \binom{5}{5} + \binom{4}{1} + \binom{3}{0}$$

Números binomiais complementares

Dois números binomiais são chamados complementares quando a soma dos seus denominadores for igual ao numerador; isto é, sendo $\binom{n}{p}$ e $\binom{n}{n-p}$, temos **(p) + (n – p) = n**, em que **n** é o numerador.

Exemplos:

- Os números $\binom{7}{2}$ e $\binom{7}{5}$ são complementares, pois $2 + 5 = 7$.
- Os números $\binom{5}{1}$ e $\binom{5}{4}$ são complementares, pois $1 + 4 = 5$.

Igualdade entre números binomiais

Dois números binomiais $\binom{a}{b}$ e $\binom{c}{d}$, com a, b, c e d $\in$ N são iguais se:

- $a = c$ e $b = d$
- Se forem complementares, ou seja, $a = c$ e $b + d = a$

Exemplo:

1. Encontre o valor de x, sabendo que $\binom{6}{2x} = \binom{6}{x+3}$

Como são iguais:

$2x = x + 3$

$\mathbf{x = 3}$

Como são complementares:

$2x + x + 3 = 6$

$3x = 3$

$\mathbf{x = 1}$

Calcular **x**: $\binom{12}{5x} = \binom{12}{x+8}$

Solução:

Como são iguais:

$\binom{12}{5x} = \binom{12}{x+8} \Leftarrow 5x = x + 8$

$\mathbf{x = 2}$

Como são complementares:

$\binom{12}{5x} = \binom{12}{x+8} \Leftarrow 5x + x + 8 = 12 \therefore \mathbf{x = 2/3}$

(não satisfaz, pois $x \in$ N)

Exercício

22. Calcule os valores de **x** nas igualdades abaixo:

a) $\binom{10}{3x} = \binom{10}{x+6}$

b) $\binom{11}{4x} = \binom{11}{x+6}$

Relação de Stieffel

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$$

Exemplo:

Resolva a equação:

$\binom{5}{4} + \binom{5}{5} = \binom{6}{x+2}$

Solução da reação de Stieffel:

$\binom{6}{5} = \binom{6}{x+2}$

Taxas iguais:

$x + 2 = 5$

$x = 3$

Taxas complementares:

$x + 2 = 5$

$x = -1$

Exercício

23. Determine o valor de **x** nas igualdades abaixo:

a) $\binom{7}{4x-3} = \binom{6}{4} + \binom{6}{5}$

b) $\binom{10}{2x+5} = \binom{9}{3} + \binom{9}{4}$

Testes

50. Calcule **A**, sendo $A = \binom{7}{2} + \binom{2}{1} - \binom{4}{2}$.

a) 10
b) 5
c) 15
d) 17
e) n.d.a.

51. (UFRN) A expressão $\binom{7}{3} + \binom{7}{4} - 35$ é igual a:

a) 30
b) 35
c) 40
d) 45
e) 50

52. Resolva a equação $\binom{5}{2x} = \binom{5}{x+2}$:

a) {1, 2}
b) {1}
c) {2}
d) {–2}
e) n.d.a.

53. (UECE) A soma das soluções da equação

$$\binom{17}{5} + \binom{17}{6} = \binom{18}{4x-1} \text{ é:}$$

a) 8
b) 5
c) 6
d) 7
e) 10

54. O produto das soluções da equação

$$\binom{8}{6} + \binom{8}{7} = \binom{9}{x+3} \text{ é:}$$

a) 3
b) – 3
c) 4
d) – 4
e) n.d.a.

55. (PUC-RS) Sendo $\binom{18}{k} = \binom{18}{k+4}$, então **k!** vale:

a) 120
b) 720
c) 840
d) 5 040
e) 40 320

56. (PUC-RS) A soma dos valores que **m** pode assumir na igualdade $\binom{17}{m-1} = \binom{17}{2m-6}$ é:

a) 7
b) 11
c) 13
d) 15
e) 17

Triângulo de Pascal

Os números binomiais podem ser dispostos ordenadamente em um quadro denominado Triângulo de Pascal.

n \ p	0	1	2	3	4	...	n
0	$\binom{0}{0}$						
1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$					
2	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$				
3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$			
4	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		
n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	...	$\binom{n}{n}$

Importante saber

- Binomiais de mesmo numerador estão colocados na mesma linha.
- Binomiais de mesmo denominador estão colocados na mesma coluna.

Ao substituirmos cada binomial por seu respectivo valor, no Triângulo de Pascal, temos:

n \ p	0	1	2	3	4	5	6	...	soma = 2^n
0	1								$2^0 = 1$
1	1	1							$2^1 = 2$
2	1	2	1						$2^2 = 4$
3	1	3	3	1					$2^3 = 8$
4	1	4	6	4	1				$2^4 = 16$
5	1	5	10	10	5	1			$2^5 = 32$
6	1	6	15	20	15	6	1		$2^n = 64$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮

Note que para formarmos o Triângulo de Pascal temos três pontos a serem seguidos:

1.º O número de elementos de uma linha n é n + 1 (por exemplo: na linha 3 temos 4 elementos).

2.º Toda linha começa e termina com 1.

3.º Relação de Stieffel.

Note que, por exemplo, $\binom{2}{0}+\binom{2}{1}=\binom{3}{1}$, ou seja, $1+2=3$

Exemplo:

Tomando 6 pontos de uma circunferência, quantos polígonos podemos formar?

Resolução:

Como são pontos de uma circunferência, três deles nunca estão alinhados, portanto podemos formar polígonos com 6, 5, 4 e 3 vértices nestes pontos. Por isso, o número de polígonos é:

$$\binom{6}{6}+\binom{6}{5}+\binom{6}{4}+\binom{6}{3}$$

Mas, utilizando o Triângulo de Pascal, sabemos que:

$$\binom{6}{6}+\binom{6}{5}+\binom{6}{4}+\binom{6}{3}=2^6-\binom{6}{0}-\binom{6}{1}-\binom{6}{2}$$

$= 2^6 - 1 - 6 - 15 = 64 - 22 = 42.$

Exercício

24. Com os vértices de um heptágono formamos quantos polígonos?

Binômio de Newton

Chama-se de binômio de Newton as potências do tipo $(x + a)^n$ com $n \in \mathbb{N}^*$.

A seguir, apresentaremos alguns exemplos de binômios com seus desenvolvimentos, que são obtidos efetuando-se os produtos que as potências representam:

$(n = 1) \rightarrow (x + a)^1 = x + a$

$(n = 2) \rightarrow (x + a)^2 = x^2 + 2xa + a^2$

$(n = 3) \rightarrow (x + a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3$

$(n = 4) \rightarrow (x + a)^4 = x^4 + 4x^3a + 6x^2a^2 + 4xa^3 + a^4$

$(n = 5) \rightarrow (x+a)^5 = x^5 + 5x^4a + 10x^3a^2 + 10x^2a^3 + 5xa^4 + a^5$

Observe que:

- Os expoentes de **x** decrescem de **n** a zero.
- Os expoentes de **a** crescem de **zero** a **n**.
- A soma dos expoentes de **x** e **a**, em cada termo do desenvolvimento, é igual a **n**.
- O número de termos do desenvolvimento é igual a (n + 1).
- Se relacionarmos apenas os coeficientes numéricos do desenvolvimento, obteremos parte do Triângulo de Pascal, como é mostrado a seguir:

coeficientes de:

$(n = 1) \rightarrow 1\ \ 1 \longrightarrow (x + a)^1$

$(n = 2) \rightarrow 1\ \ 2\ \ 1 \longrightarrow (x + a)^2$

$(n = 3) \rightarrow 1\ \ 3\ \ 3\ \ 1 \longrightarrow (x + a)^3$

$(n = 4) \rightarrow 1\ \ 4\ \ 6\ \ 4\ \ 1 \longrightarrow (x + a)^4$

$(n = 5) \rightarrow 1\ \ 5\ \ 10\ \ 10\ \ 5\ \ 1 \longrightarrow (x + a)^5$

Isto significa que podemos determinar os coeficientes por intermédio das linhas do Triângulo de Pascal, tomando como referência o valor de **n** que aparece na 2.ª coluna do mesmo e que podemos escrever, por exemplo:

$$(x+a)^5=\binom{5}{0}x^5+\binom{5}{1}x^4a+\binom{5}{2}x^3a^2+\binom{5}{3}x^2a^3+\binom{5}{4}xa^4+\binom{5}{0}a^5$$

Em geral, temos:

$$(x+a)^n=\binom{n}{0}x^na^0+\binom{n}{1}x^{n-1}a^1+\binom{n}{2}x^{n-2}a^2+\ldots+\binom{n}{n}x^0a^n$$

ou

$$(x+a)^n=\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}x^{n-p}a^p$$

Importante saber

Se fizermos o desenvolvimento de $(x - a)^5$, iremos obter:

$$(x-a)^5=\binom{5}{0}x^5-\binom{5}{1}x^4a+\binom{5}{2}x^3a^2-\binom{5}{3}x^2a^3+\binom{5}{4}xa^4-\binom{5}{0}a^5$$

Note que os termos, em valor absoluto, são os mesmos de $(x + a)^5$. Os sinais, entretanto, alternam-se em (+) e (–).

Exercício

25. Desenvolva os binômios:

a) $(x + 2)^4 =$

b) $(x - 3)^5 =$

c) $(2m + 3)^3 =$

Soma dos coeficientes

Para obter a soma dos coeficientes do desenvolvimento de um binômio de Newton, basta tomar a parte literal da 1.ª parcela e 2.ª parcela como sendo 1.

Exemplos:

$(x + a)^n \longrightarrow$ soma $= (1 + 1)^n = 2^n$

$(3x + y^2)^5 \longrightarrow$ soma $= (3 \,.\, 1 + 1^2)^5 = 4^5 = 1\,024$

Exercício

26. Determine a soma dos coeficientes dos binômios abaixo:

a) $(3x + 4)^4 =$

b) $\left(\dfrac{x}{3} + 1\right)^5 =$

Fórmula do termo geral

Para obtermos um termo qualquer do binômio **$(x + a)^n$**, **$n \in N$**, sem precisar desenvolvê-lo, usaremos a seguinte expressão:

$$T_{p+1} = \binom{n}{p} . x^{n-p} . a^p$$

Termo médio

Para que um binômio de Newton admita termo médio, o seu expoente **n** será necessariamente par.

Para obtermos o valor de **p** do termo médio, basta utilizarmos a expressão:

$$p = \frac{n}{2}$$

Exemplos:

$(a^4 - 36)^8 \longrightarrow$ termo médio tem $p = 4$ (5.º termo)

$\left(4x^2 - \dfrac{1}{y}\right)^{18} \longrightarrow$ termo médio tem $p = 9$ (10.º termo)

Exercícios

27. Determinar o 5.º termo do desenvolvimento de $(x + 2)^5$:

28. Qual é o termo central do desenvolvimento $(3 - x)^6$?

29. No desenvolvimento de $(x^2 + 1)^6$, qual o coeficiente de x^8?

30. Qual o termo independente no desenvolvimento de $\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^8$?

Testes

57. (FAE-PR) Quantos termos têm o desenvolvimento de $(5x - 6y^2)^{17}$?

a) 17
b) 16
c) 18
d) 19
e) n.d.a.

58. Quantos termos têm o desenvolvimento de $(x + \sqrt{y})^8$?

a) 7
b) 8
c) 9
d) 10
e) 11

59. (PUC-PR) A soma dos coeficientes de $\left(x^3 - \frac{1}{x}\right)^{12}$ é:

a) 1
b) 6
c) 0
d) 5
e) 12

60. Qual a soma dos coeficientes do desenvolvimento de $(2x + 3y)^4$?

a) 125
b) 225
c) 625
d) 25
e) n.d.a.

61. (UFAL) O termo independente de **x** no desenvolvimento de $(2x + 3)^5$ é:

a) 81
b) 108
c) 162
d) 243
e) 486

62. Tomando-se 8 pontos de uma circunferência, formamos quantos polígonos?

a) 110
b) 219
c) 319
d) 400
e) 249

63. Quantos polígonos podemos formar com os vértices do eneágono?

a) 280
b) 326
c) 466
d) 510
e) 606

64. Ao desenvolvermos $(3x^2 + a)^4$, obtemos:

a) $81x^4 + 108ax^6 + 54a^2x^2 + 12x^2$
b) $81x^8 + 108ax^6 + 54a^2x^4 + 12a^3x^2 + a^4$
c) $81x^6 + 108ax^4 + 54a^2x^2 + 12a^3x^4 + a^4$
d) $81x^{10} + 108ax^8 + 54a^2x^6 + 12a^3x^4 + a^3$
e) n.d.a.

65. (FPA-RS) O 5.º termo no desenvolvimento de $(x + 1)^9$ é:

a) $378x^5$
b) $120x^5$
c) $126x^5$
d) $84x^5$
e) $36x^5$

66. (Cesgranrio-RJ) Qual o coeficiente de x^4 no desenvolvimento de $(x + 2)^6$?

a) 20
b) 30
c) 40
d) 50
e) 60

67. (FEI-SP) No desenvolvimento de $(1 + 2x^2)^6$, o coeficiente de x^8 é:

a) 60
b) 120
c) 240
d) 480
e) 960

68. (UFES) Qual o termo central de $(x - 3)^6$?

a) $-540x^3$
b) $-3\ 240x^3$
c) $3\ 240x^3$
d) $540x^3$
e) $540x^4$

69. Qual o termo central de $(1 - a)^{12}$?

a) $912a^6$
b) $914a^3$
c) $962a^6$
d) $928a^3$
e) $924a^6$

70. (PUC-RS) O coeficiente de x^2 no desenvolvimento de $\left(2x - \frac{1}{x}\right)^6$ é:

a) 15
b) 60
c) 160
d) 192
e) 240

71. Calcule o termo independente de **x** no desenvolvimento de $\left(x^4 - \frac{1}{x}\right)^{10}$:

a) 45
b) 60
c) 20
d) 15
e) n.d.a.

72. (PUC-MG) No desenvolvimento do binômio $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^9$, o valor do termo independente é:

a) $\binom{9}{0}$
b) $\binom{9}{1}$
c) $\binom{9}{2}$
d) $\binom{9}{3}$
e) $\binom{9}{4}$

73. (UFPA) Qual o valor do termo médio do desenvolvimento de $(2x + 3y)^8$?

a) $70x^4y^4$
b) $70 \cdot 16 \cdot 81x^4y^4$
c) $70 \cdot 16 \cdot 81x^5y^4$
d) $70 \cdot 16 \cdot 81x^4y^5$
e) $70 \cdot 16 \cdot 81x^5y^5$

Teoria das probabilidades

O Brasil de hoje pode ser considerado como um país de loterias. Observe alguns exemplos: Mega-Sena, Lotofácil, Quina, Loteria Esportiva, Loteria Federal, Loterias Estaduais, etc.

E, toda semana, milhões e milhões de brasileiros sonham com os milhões e milhões de reais que serão distribuídos nos diversos sorteios.

Um exemplo, que é repassado, é a ilusão de parecer tão fácil acertar na loteria de números da Mega-Sena. Porém, a probabilidade de acerto com uma aposta simples de 6 números é de 1 em 50 063 860.

Podemos concluir que o estudo das probabilidades é de grande importância, não só para sermos esclarecidos das nossas reais chances de acerto em uma determinada loteria, como também em outros ramos dos avanços da tecnologia em que a teoria das probabilidades é aplicada.

Experimentos

No estudo das probabilidades, podemos considerar dois tipos de experimentos: determinístico e aleatório.

Um experimento é considerado determinístico quando os seus resultados podem ser previstos (conhecidos) antes de sua realização. Por exemplo: ao soltarmos uma bola de tênis do alto de um edifício poderemos determinar a velocidade com que esta chega ao solo, se soubermos a altura do edifício; ou ainda, poderemos determinar a altura deste sabendo a velocidade com que a bolinha chega ao solo. Este experimento não terá seu resultado alterado nem que seja realizado 1 000 000 de vezes.

Por outro lado, poderemos verificar que isso não se aplica a experimentos aleatórios, pois estes, ao serem realizados repetidas vezes, nas mesmas condições, apresentam resultados variados. Já imaginou se fosse aplicada a mesma ideia de experimentos determinísticos em experimentos aleatórios? A Mega-Sena sempre teria o mesmo resultado ou os filhos de um casal sempre seriam do mesmo sexo.

Mesmo sabendo todos os resultados possíveis de um experimento aleatório não podemos determinar qual seria o seu resultado específico, por exemplo: em um nascimento sabemos que a criança será menino ou menina, mas não sabemos o sexo dessa criança antes do seu concebimento.

Os experimentos aleatórios estão sujeitos à "Lei do Acaso". Como não podemos prever os resultados, vamos descobrir as chances de ocorrência de cada experimento aleatório.

> "A teoria das probabilidades estuda a forma de estabelecer as chances de ocorrência de cada experimento aleatório."

Elementos

Vimos que um experimento aleatório apresenta as seguintes características:

- Podemos repeti-los várias vezes nas mesmas condições.
- Conhecemos todos os resultados possíveis.
- Não podemos prever os resultados finais.

Este experimento apresenta dois elementos: **espaço amostral** e **evento**.

Espaço amostral (E)

É o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório.

Exemplos:

No experimento "verificar a face voltada para cima no lançamento de uma moeda" os resultados possíveis são cara ou coroa. Portanto, o espaço amostral será E = {cara, coroa}.

Já no experimento "verificar a face voltada para cima em um lançamento de um dado" podemos ter como espaço amostral E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Evento

É qualquer subconjunto do espaço amostral. Representamos pelas letras A, B, C...

Exemplos:

1. Experimento aleatório: verificar a face voltada para cima em um lançamento de um dado.

Espaço amostral (E) = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Alguns exemplos de eventos.

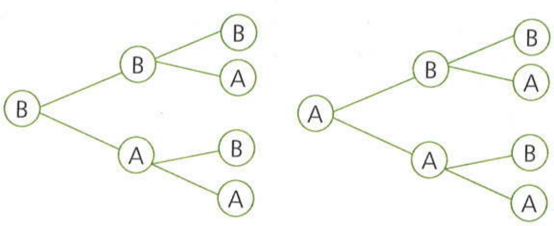
Evento A: Face voltada para cima com número ímpar.
(A = {1, 3, 5})

Evento B: Face voltada para cima com número primo.
(B = {2, 3, 5})

Evento C: Ocorrência de um número menor que 7.
(C = {1, 2, 3, 4, 5, 6}) Observação: o número de elementos do evento C é igual ao número de elementos do espaço amostral.

2. Seja uma urna, contendo 3 bolas brancas e 3 bolas azuis. Dessa urna são retiradas sucessivamente 3 bolas:

O espaço amostral é:



E = {(BBB), (BBA), (BAB), (BAA), (ABB), (ABA), (AAB), (AAA)}

Alguns exemplos de eventos

Evento "A": As três bolas têm a mesma cor:
A = {(BBB), (AAA)}

Evento "B": Duas bolas são brancas:
B = {(BBA), (BAB), (ABB)}

Importante saber

Considere:

a) "E": o espaço amostral.
b) n(E): o número de elementos do espaço amostral.
c) "A": o evento.
d) n(A): o número de elementos do evento.

Exercícios

31. Experimento 1:
Lançar um dado e observar o número obtido na face superior: (dado normal)
E = ____________________
n(E) = ____________________

Evento "A" (um número par)
A = ____________________
n(A) = ____________________

Evento "B" (um número primo)
B = ____________________
n(B) = ____________________

32. Experimento 2:
Registrar as faces voltadas para cima em três lançamentos de uma moeda.
E = ____________________
n(E) = ____________________

Evento "A" (ocorrência de duas caras pelo menos)
A = ____________________
n(A) = ____________________

33. No lançamento de dois dados, analisando-se as faces voltadas para cima, temos:

a) Espaço amostral (E).

b) Ocorrência de resultados iguais.

c) Ocorrência de resultados em que a soma das faces é 7.

d) Ocorrência de pelo menos um dos resultados igual a 6.

Tipos de eventos

- **Evento certo**

É o próprio espaço amostral.

Exemplo:

Experimento: Analisar a face voltada para cima no lançamento de um dado.

Evento A: Ocorrência de número menor que 7.

E = {1, 2, 3, 4, 5, 6} A = {1, 2, 3, 4, 5, 6} A = E

- **Evento impossível**

É o subconjunto vazio do espaço amostral.

Exemplo:

Experimento: Retirar uma bola preta de uma urna com 1 bola azul e 1 bola branca.

Evento A: Ocorrência de bola preta.

E = {branca, azul} A = ∅

- **Evento união**

É a reunião de dois eventos.

Exemplo:

Experimento: Analisar a face voltada para cima no lançamento de um dado.

Evento A: Ocorrência de número par.

Evento B: Ocorrência de número ímpar maior do que 1.

E = {1, 2, 3, 4, 5, 6} A = {2, 4, 6} B = {3, 5}

A ∪ B = {2, 3, 4, 5, 6}

- **Evento intersecção**

É a intersecção de dois eventos.

Exemplo:

Espaço amostral:

E = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

Evento A: Retirar um número par menor que 10.

Evento B: Retirar um número múltiplo de 4.

A = {2, 4, 6, 8} B = {4, 8, 12}

A ∩B = {4, 8}

- **Eventos mutuamente exclusivos**

São eventos em que a intersecção é o conjunto vazio (A ∩ B = ∅).

Para exemplificarmos este evento consideraremos o conjunto dos números naturais N = {0, 1, 2, 3, 4, 5...} como espaço amostral.

Exemplo:

Evento A: Ocorrência de número par.

Evento B: Ocorrência de número ímpar.

A = {0, 2, 4, 6...} B = {1, 3, 5, 7...}

A ∩ B = ∅

- **Eventos complementares**

São dois eventos onde:

A ∪ B = E (o evento união é o espaço amostral)

A ∩ B = ∅ (o evento intersecção é o conjunto vazio)

Exemplo:

Considere neste caso o espaço amostral E = {3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13}.

Evento A: Ocorrência de um número par.

Evento B: Ocorrência de um número primo.

A = {4, 6, 8, 10, 12} B = {3, 5, 7, 11, 13}

A ∩ B = ∅ A ∪ B = E

Testes

74. Ao lançarmos uma moeda três vezes consecutivas e observando a face superior, qual o número de elementos do espaço amostral?

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 8

75. No teste anterior, qual o número de elementos do evento "obter apenas 2 caras"?

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) n.d.a.

76. Ainda no teste 74, qual o número de elementos do evento "obter duas coroas consecutivamente nas duas primeiras jogadas"?

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

77. No lançamento de um dado, o evento de se obter um número maior que 6 é:

a) Evento certo.
b) Evento complementar.
c) Evento união.
d) Evento intersecção.
e) Evento impossível.

78. No lançamento simultâneo de dois dados, qual o número de elementos do espaço amostral?
a) 36
b) 72
c) 24
d) 12
e) 6

79. No teste anterior, qual é a quantidade de elementos do evento "retirar pelo menos um número 5"?
a) 7
b) 8
c) 9
d) 10
e) 11

Probabilidade de um evento

Sendo **n(A)** o número de elementos de um evento **A** e **n(E)** o número de elementos do espaço amostral **E**, a **probabilidade do evento A**, que se representa por **P(A)**.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(E)}$$

- **n(A)** é o número de situações favoráveis quanto à ocorrência do evento A.
- **n(E)** é o número de casos possíveis do espaço amostral.

Notas:
- $P(\varnothing) = 0$ e $P(E) = 1$.
- Como $0 \le n(A) \le n(E)$, tem-se $0 \le P(A) \le 1$.
- É comum representarmos as probabilidades em porcentagem.

Exemplo:

$$P(A) = \frac{1}{2} \text{ ou } P(A) = 50\%$$

Exemplos:

1. Considere um "dado" com suas faces numeradas de 1 a 6. Ao ser lançado, qual é a probabilidade do número da face voltada para cima ser:

Resolução:

a) par?

$$n(E) = 6 \quad P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} = \frac{3}{6}$$

$$n(A) = 3 \quad P(A) = 50\%$$

b) ímpar?

$$n(E) = 6 \quad P(B) = \frac{n(B)}{n(E)} = \frac{3}{6}$$

$$n(B) = 3 \quad P(B) = 50\%$$

c) menor ou igual a 2?

$$n(E) = 6 \quad P(C) = \frac{n(C)}{n(A)} = \frac{2}{6}$$

$$n(C) = 2 \quad P(C) = 33{,}3\%$$

d) um número primo?

$$n(E) = 6 \quad P(D) = \frac{n(D)}{n(E)}$$

$$P(D) = \frac{3}{6} = 50\% \qquad n(D) = 3$$

2. De um baralho de 52 cartas tiram-se, sucessivamente, sem reposição, duas cartas. Determine a probabilidade de:
a) Duas cartas serem "copas".
b) Duas cartas serem "valetes".

Resolução:

a) Número de elementos do espaço amostral.

$$n(E) = C_{52,2} = \frac{52!}{2!50!} = \frac{52.51}{2} = 1\,326$$

Evento A $\longrightarrow$ 2 cartas de copas

$$n(A) = C_{13,2} = \frac{13!}{2!11!} = \frac{13.12}{2} = 78$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} = \frac{78}{1\,326} = \frac{1}{17}$$

b) Evento B $\longrightarrow$ 2 valetes.

$$n(B) = C_{4,2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(E)} = \frac{6}{1\,326} = \frac{1}{221}$$

3. Considere o lançamento de uma moeda não viciada 3 vezes consecutivas. Determine a probabilidade de:
a) 3 resultados iguais.
b) Ocorrerem apenas 2 caras.

Resolução:

Neste caso o espaço amostral é E = {(kkk), (kcc), (kck), (kkc), (ccc), (ckk), (cck), (ckc)}, onde k = coroa e c = cara. Com isso n(E) = 8.

a) $n(A) = 2$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 25\%$$

b) $n(B) = 3$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(E)} = \frac{3}{8}$$

Probabilidade de eventos complementares

Sejam A e B dois eventos complementares de um espaço amostral E. Nessas condições $P(A) + P(B) = 1$.

Exemplo:

No lançamento de uma moeda a probabilidade de tirar cara ou coroa é de $\frac{1}{2} = 50\%$. Portanto, $P(k) + P(c) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, em que P(k) é a probabilidade de tirar coroa e P(c) é a probabilidade de tirar cara. Com isso **r** e **c** são eventos complementares.

Exercícios

34. Um dado não viciado é jogado duas vezes consecutivas. Determine a probabilidade de:

a) Se retirar dois resultados iguais.

b) Se retirar dois resultados diferentes.

c) Se retirar o número 4 pelo menos uma vez.

35. Com os dígitos 1, 4, 7, 8 e 9 são formados números com 3 algarismos distintos. Um deles é escolhido ao acaso. Encontre a probabilidade de:

a) O número ser par.

b) O número ser ímpar.

36. Dois amigos disputam um jogo com 2 dados. Foi combinado que Marcos ganharia se o resultado do primeiro lançamento fosse menor que o segundo. Já Celso ganharia se os resultados fossem iguais. Qual é a probabilidade de cada um vencer?

Testes

80. (PUC-SP) O número da placa de um carro é par. A probabilidade de o algarismo das unidades ser zero é:

a) 5

b) 1/2

c) 4/9

d) 1/5

e) 5/9

81. (USP-SP) Qual a probabilidade de se obter um número divisível por 5, na escolha ao acaso de uma das permutações dos algarismos 1, 2, 3, 4 e 5?

a) 5

b) 1/5

c) 1

d) 1/4

e) 1/6

82. (FUVEST-SP) Escolhido ao acaso um elemento do conjunto dos divisores de 60, a probabilidade de que ele seja primo é:

a) 1/2

b) 1/3

c) 1/4

d) 1/5

e) 1/6

83. (UFSC) Uma urna tem 10 bolas idênticas numeradas de 1 a 10. Se retirarmos uma bola da urna, a probabilidade de não obtermos a bola número 7 é igual a:

a) 2/9

b) 1/10

c) 1/5

d) 9/10

e) 9/11

84. (USP-SP) Se um certo casal tem 3 filhos, então a probabilidade de os 3 filhos serem do mesmo sexo, dado que o primeiro filho é homem, vale:

a) 1/3

b) 1/2

c) 1/5

d) 1/4

e) 1/6

85. Três moedas são lançadas simultaneamente. A probabilidade de se obter duas caras e uma coroa é:

a) 1/8
b) 1/4
c) 5/16
d) 1/2
e) 3/8

86. (Cesgranrio-RJ) Ao lançarmos dois dados, qual a probabilidade de obtermos, nas faces superiores, dois números ímpares?

a) 1/3
b) 1/2
c) 1/4
d) 2/5
e) 3/5

87. (OSEC-SP) A probabilidade de uma bola branca aparecer ao se retirar uma única bola de uma urna contendo 4 bolas brancas, 3 vermelhas e 5 azuis é:

a) $\frac{1}{3}$

b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{1}{4}$

d) $\frac{1}{12}$

e) n.d.a.

88. (OSEC-SP) Foram preparadas noventa empadinhas de camarão, sessenta delas deveriam ser bem mais apimentadas. Por pressa e confusão de última hora, foram todas colocadas, ao acaso, numa mesma travessa, para serem servidas. A probabilidade de alguém retirar uma empadinha mais apimentada é:

a) $\frac{1}{3}$

b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{1}{60}$

d) $\frac{2}{3}$

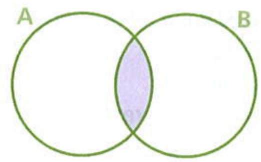
e) $\frac{1}{90}$

89. (UFMS) A testemunha de um assalto deve identificar 2 suspeitos que estão entre 10 pessoas apresentadas para a identificação e não consegue reconhecê-los. De maneira irresponsável a testemunha aponta duas pessoas. A probabilidade de serem identificadas 2 pessoas inocentes é de, aproximandamente:

a) 50%
b) 80%
c) 37%
d) 62%
e) 23%

Adição de probabilidades

A probabilidade da união de dois eventos A e B é igual a soma das probabilidades de A e B menos a probabilidade da intersecção de A em B.



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{n(A)}{n(E)} + \frac{n(B)}{n(E)} - \frac{n(A \cap B)}{n(E)}$$

Se os eventos são mutuamente exclusivos, isto é:

$$A \cap B = \varnothing$$

Então:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{n(A)}{n(E)} + \frac{n(B)}{n(E)}$$

Multiplicação de probabilidades

Se um acontecimento é composto de vários eventos sucessivos e independentes, a probabilidade de ocorrência é dada pelos produtos das probabilidades dos eventos componentes.

$$P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B)$$

$$P(A \cap B) = \frac{n(A)}{n(E)} + \frac{n(B)}{n(E)}$$

Utilizaremos a adição quando os eventos forem ligados por meio da palavra **ou**. Já a multiplicação é utilizada quando os eventos forem ligados por meio de **e**.

Exemplos:

1. Jogam-se um dado e uma moeda. Qual a probabilidade de se obter cara na moeda e o número 5 no dado?

Resolução:

Como os eventos são mutuamente exclusivos, temos $P(A \cap B) = P(A) \, . \, P(B)$, onde:

$P(A)$ = probabilidade de tirar cara.

$P(B)$ = probabilidade de tirar o número 5.

$$P(A \cap B) = P(A).\ P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

2. Em uma urna temos 3 bolas verdes e 2 brancas de onde são retiradas 2 bolas sem reposição. Determine a probabilidade de ocorrerem:

a) 2 bolas verdes;

b) 2 bolas brancas;

c) 2 bolas de cores diferentes.

$$n(E) = C_{5,2} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5\,.\,4}{2} = 10$$

a) $P(A) \longrightarrow$ probabilidade de sortearem 2 bolas verdes.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} = \frac{C_{3,2}}{10} = \frac{3}{10} = 30\%$$

b) $P(B) \longrightarrow$ probabilidade de sortearem 2 bolas brancas.

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(E)} = \frac{C_{2,2}}{10} = \frac{1}{10} = 10\%$$

c) $P(C) \longrightarrow$ probabilidade de serem sorteadas 2 bolas de cores diferentes.

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(E)} = \frac{C_{3,1} \cdot C_{2,1}}{10} = \frac{3\,.\,2}{10} = \frac{6}{10} = 60\%$$

Exercícios

37. Em uma gaveta há 10 lâmpadas das quais 3 estão queimadas. Se três lâmpadas são escolhidas ao acaso, sem reposição, qual a probabilidade de apenas uma estar queimada?

38. Em uma caixa temos 4 bolas azuis e 3 bolas amarelas. Retira-se desta urna 3 bolas aleatoriamente e sem reposição. Qual é a probabilidade de retirarmos 2 bolas de uma mesma cor e uma terceira diferente?

39. Seja o conjunto $A = \{x \in N/x \leq 100\}$. Se retirarmos um número deste conjunto, aleatoriamente, qual a probabilidade deste ser par ou múltiplo de 5?

Testes

90. (CESCEA-SP) Em uma urna contém 20 bolas, numeradas de 1 a 20. Seja o experimento: retirada de uma bola, considerando os eventos:

A = {a bola retirada possui um múltiplo de 2}

B = {a bola retirada possui um múltiplo de 5}

Então a probabilidade do evento $A \cup B$ é:

a) 13/20
b) 4/5
c) 7/10
d) 3/5
e) 11/20

91. (Cesgranrio-RJ) Dois dados são lançados. A probabilidade da soma dos resultados ser 6 é:

a) 1/36
b) 5/36
c) 5/30
d) 1/30
e) 6/36

92. Três moedas são lançadas. A probabilidade de se obter pelo menos duas caras ou três coroas é:

a) 1/8
b) 1/4
c) 5/16
d) 3/8
e) 6/8

93. (FCMSC-SP) Num grupo de 60 pessoas, 10 são torcedoras do São Paulo, 5 são torcedoras do Palmeiras e as demais são torcedoras do Corinthians. Escolhido ao acaso um elemento do grupo, a probabilidade dele ser torcedor do São Paulo ou do Palmeiras é:

a) 0,40
b) 0,25
c) 0,50
d) 0,30
e) n.d.a.

94. (UEM-PR) Um número é escolhido ao acaso entre os 20 inteiros, de 1 a 20. A probabilidade de o número escolhido ser primo ou quadrado perfeito é:

a) 1/5
b) 2/25
c) 4/25
d) 2/5
e) 3/5

95. (UNESP-SP) Dois dados perfeitos e distinguíveis são lançados ao acaso. A probabilidade de que a soma dos resultados obtidos seja 3 ou 6 é:

a) 7/18
b) 1/18
c) 7/36
d) 7/12
e) 4/9

96. (PUC-SP) O jogo da loto consiste em sortear 5 dezenas em 100 dezenas possíveis. Alguém, querendo jogar nessa loteria, pode escolher de 5 a 10 dezenas. Se alguém que escolhe 5 dezenas tem probabilidade x de ganhar, então, quem escolhe 7 dezenas tem que probabilidade de ganhar?

a) 7x
b) 14x
c) 21x
d) 28x
e) 35x

97. (FGV-SP) Um grupo de seis amigos (A, B, C, D, E e F) pretende realizar um passeio em um barco onde há só 3 lugares. É feito um sorteio para serem escolhidos os três amigos que ocuparão o barco. A probabilidade de que A seja escolhido e B não o seja é:

a) 6/15
b) 3/10
c) 4/6
d) 1/2
e) 4/5

98. Num grupo de 40 pessoas, 8 delas usam óculos. Escolhendo-se aleatoriamente 2 pessoas desse grupo, a probabilidade de que ambas usem óculos é:

a) $\frac{4}{5}$
b) $\frac{1}{5}$
c) $\frac{17}{195}$
d) $\frac{27}{175}$
e) $\frac{7}{195}$

99. (Mackenzie-SP) Sorteado ao acaso um número natural n, $1 \leq n \leq 99$, a probabilidade dele ser divisível por 3 é:

a) $\frac{2}{3}$
b) $\frac{1}{3}$
c) $\frac{1}{9}$
d) $\frac{1}{2}$
e) $\frac{2}{9}$

100. Uma caixa contém 1 000 bolinhas numeradas de 1 a 1 000. Uma bolinha é sorteada. A probabilidade da bolinha sorteada ter um número múltiplo de 2 é:

a) 50%
b) 40%
c) 30%
d) 20%
e) 10%

101. (UFRGS) Dentre um grupo formado por 2 homens e 4 mulheres, três pessoas são escolhidas ao acaso. A probabilidade de que sejam escolhidos um homem e duas mulheres é de:

a) 35%
b) 30%

c) 33%
d) 50%
e) 60%

102. (UFRJ) A tabela abaixo fornece o número de estudantes matriculados por sexo e curso, no Colégio Técnico da UFRJ, no ano de 2000.

Curso	Sexo	
	Masculino	Feminino
Ensino Médio Regular	30	52
Técnico em Economia Doméstica	2	100
Técnico em Agropecuária	132	120

Ao escolher um aluno, a probabilidade de o mesmo ser do sexo feminino ou do curso Técnico em Agropecuária é:

a) $\frac{33}{109}$

b) $\frac{38}{109}$

c) $\frac{101}{109}$

d) $\frac{108}{109}$

e) $\frac{120}{109}$

Respostas

Exercício 01: 15

Exercício 02: 6 possibilidades.

Exercício 03: 48

Exercício 04: 16 e 26

Exercício 05: a) 6 720; b) 10; c) 15; d) 2 499; e) n = 1; f) n = – 4 e n = – 5; g) n = 5.

Exercício 06: n = 7

Exercício 07: 120

Exercício 08: a) 24; b) 720; c) 120; d) 24; e) 576.

Exercício 09: 5 040

Exercício 10: 48

Exercício 11: 6

Exercício 12: 10

Exercício 13: 10

Exercício 14: 56

Exercício 15: 120 quadriláteros e 70 triângulos.

Exercício 16: n = 6

Exercício 17: 360

Exercício 18: 120

Exercício 19: 720

Exercício 20: n = 3

Exercício 21: 21

Exercício 22: a) x = 1 e x = 3; b) x = 2 e x =1.

Exercício 23: a) x = 2 e x = 5/4; b) x = –1/2 e x = 1/2.

Exercício 24: 99

Exercício 25: a) $x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16$;
b) $x^5 - 15x^4 + 90x^3 - 270x^2 + 450x + 243$;
c) $8\ m^3 + 36\ m^2 + 54\ m + 27$

Exercício 26: a) 2 401; b) 1 024/243

Exercício 27: 80x

Exercício 28: $-540x^3$

Exercício 29: 15

Exercício 30: 70

Exercício 31:
E = {1, 2, 3, 4, 5, 6} e n(E) = 6; A = {2, 4, 6} e n(A) = 3; B {2, 3, 5} e n(B) = 3

Exercício 32:
E = {C C C, C K C, C C K, C K K, K C C, K K C, K C K, K K K} e n(E) = 8; A ={C K C, C C K, K C C, C C C} e n(A) = 4

Exercício 33: a) (1, 1) (1, 2) (1, 3) (1, 4) (1, 5) (1, 6) (2, 1) (2, 2) (2, 3) (2, 4) (2, 5) (2, 6) (3, 1) (3, 2) (3, 3) (3, 4) (3, 5) (3, 6) (4, 1) (4, 2) (4, 3) (4, 4) (4, 5) (4, 6) (5, 1) (5, 2) (5, 3) (5, 4) (5, 5) (5, 6) (6, 1) (6, 2) (6, 3) (6, 4) (6, 5) (6, 6); b) {(1, 1) (2, 2) (3, 3) (4, 4) (5, 5) (6, 6)}; c) {(6, 1) (5, 2) (4, 3) (3, 4) (2, 5) (1, 6)}; d) {(6, 1) (6, 2) (6, 3) (6, 4) (6, 5) (6, 6) (1, 6) (2, 6) (3, 6) (4, 6) (5, 6)}

Exercício 34: a) $P_{(1)} = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6} = 16{,}7\%$

b) $P_{(d)} + P_{(1)} = 100\% = 83{,}3\%$

c) $P = \dfrac{11}{36} = 30{,}5\%$

Exercício 35:

$5 . 4 . 3 = 60$

a) $3 . 4 . 2 = 24 \quad P = \dfrac{24}{60} = \dfrac{2}{5} = 40\%$

b) P(par) + P(ímpar) = 100% → P(ímpar) = 60%

Exercício 36:

$P(M) = \dfrac{15}{36} = \dfrac{5}{12} = 41{,}7\%$

$P(C) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6} = 16{,}7\%$

Exercício 37: 17,5%

Exercício 38: 24/35

Exercício 39: 60%

Gabarito

01) E	02) A	03) C	04) D	05) A	06) E
07) E	08) D	09) C	10) E	11) A	12) A
13) D	14) D	15) A	16) D	17) B	18) C
19) A	20) D	21) B	22) E	23) D	24) E
25) C	26) D	27) A	28) D	29) C	30) C
31) A	32) D	33) A	34) B	35) D	36) C
37) E	38) A	39) D	40) D	41) E	42) *
43) B	44) D	45) A	46) D	47) C	48) B
49) C	50) D	51) B	52) A	53) B	54) D
55) D	56) C	57) C	58) C	59) C	60) C
61) D	62) B	63) C	64) B	65) C	66) E
67) C	68) A	69) E	70) E	71) A	72) D
73) B	74) E	75) C	76) B	77) E	78) A
79) E	80) D	81) B	82) C	83) D	84) D
85) E	86) C	87) A	88) D	89) D	90) D
91) B	92) E	93) B	94) E	95) C	96) C
97) B	98) E	99) B	100) A	101) E	102) C

*42. a) 10 pares; b) 120 equipes.

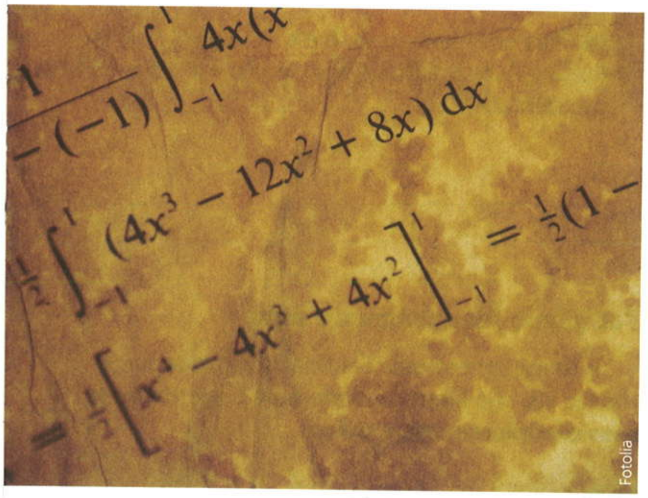
Sumário

Matemática 8E

Avaliações

Anotações

Polinômios



Fotolia

Expressão geral

Chama-se **função polinomial P(x)** ou, simplesmente, **polinômio P(x)** de grau **m**, uma expressão que pode ser redutível à forma:

$$P(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \dots + a_m \text{ com } m \in N \text{ e } a_0 \neq 0$$

Onde:

- $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$ são constantes complexas ditas **coeficientes** e $a_0 \neq 0$.
- $a_0x^m, a_1x^{m-1}, a_2x^{m-2}, \dots, a_m$ são parcelas do polinômio denominadas **termos**, sendo que a_m é chamado de **termo independente de x**.
- Chama-se de **grau de um polinômio P(x)** de coeficientes não todos nulos, ao maior expoente da variável **x**, cujo coeficiente seja diferente de zero.

Exemplos:

- $P(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 1$ é um polinômio na variável **x** do 3.º grau. Os coeficientes são: 3, –2 e 4, o termo independente é –1.
- $P(x) = 3x^2 + \frac{2}{x} + 1$ **não** é um polinômio, pois a variável **x** aparece no denominador.
- $P(x) = 3x^{-2} + 2x + 4$ não é um polinômio, pois a variável **x** aparece com expoente negativo.

Exercício

01. Discuta o grau do polinômio $P(x) = (m - 1)x^3 + 3x^2 - 7x + 1$ para:

a) $m = 1$

b) $m \neq 1$

Valor numérico de polinômios

O **valor numérico** de um polinômio P(x) para x = a é o número que se obtém substituindo-se **x** por **a** e efetuando-se todas as operações indicadas na expressão algébrica polinomial, além disso indica-se por **P(a)**.

Exemplo:

Dado $P(x) = x^2 + 3x - 1$, calcular o valor numérico P(10).

$P(10) = (10)^2 + 3(10) - 1$

$P(10) = 100 + 30 - 1 = 129$

Exercícios

02. Sendo dado o polinômio $P(x) = x^3 + x + 1$, calcule:

a) $P(2) =$

b) $P(-1) =$

03. Calcular **a** se $P(x) = x^2 + ax + 4$ e $P(1) = 7$.

Raiz ou zero de um polinômio

Dado um polinômio P(x), se o valor numérico **P(a) = 0**, então **a** será denominado **raiz** ou **zero** do polinômio P(x).

Exemplo:

Determine as raízes do polinômio:

$P(x) = x^2 - 5x + 6$

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2}$$

$$x = \frac{5 \pm 1}{2}$$

x = 3 ou **x = 2**

Exercício

04. Calcule as raízes dos polinômios:

a) $P(x) = x^2 - 3x + 2$

b) $P(x) = x^2 - 7x$

Identidade de polinômios

Dois polinômios de mesmo grau são idênticos se, e somente se, os coeficientes correspondentes aos **termos de mesmo grau forem iguais**.

Exemplo:

Para que valores de **a** e **b** os polinômios $P(x) = ax^3 + bx^2 + 7$ e $Q(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7$ são idênticos?

Resolução:

Comparando P(x) e Q(x), temos $a = 2$ e $b = -5$.

Exercícios

05. Calcule **m** e **n** se os polinômios P(x) e Q(x) são idênticos.

$P(x) = (m + n)\,x^3 + mx^2 + 1$

$Q(x) = 7x^3 + 4x^2 + 1$

06. Para que valores de **a**, **b** e **c**

$P(x) = (a + b)\,x^2 + (b + c)\,x + c$ e $Q(x) = x^2 - 5x + 1$

são idênticos?

Polinômio identicamente nulo

A condição necessária e suficiente para que um polinômio P(x) seja **identicamente nulo** é que **todos os seus coeficientes sejam nulos**.

Exercício resolvido

Determine o valor de **m** para que o polinômio $P(x) = (m^2 - 1)x^2 + (m - 1)x$ seja nulo.

Resolução:

$P(x) = 0$

$(m^2 - 1)x^2 + (m - 1)x = 0$

Todos os coeficientes devem ser iguais a zero, logo:

I. $m^2 - 1 = 0 \rightarrow \pm\sqrt{1} \rightarrow m = 1$ ou $m = -1$

II. $m - 1 = 0 \rightarrow m = 1$

O valor de **m** que torna as igualdades I e II verdadeiras, simultaneamente, é:

$\boxed{m = 1}$

Exercício

07. Determine os valores de **a**, **b** e **c** para que o polinômio $P(x) = (a + b)\,x^2 + (b + 3)\,x + 2 + c$ seja identicamente nulo.

Adição e subtração de polinômios

Para adicionarmos (ou subtrairmos) dois polinômios, devemos adicionar (ou subtrair) os seus termos semelhantes.

Exemplos:

a) Sejam os polinômios:

$P(x) = x^4 + 2x^3 - 2 \longrightarrow$ grau de $P(X) = 4$

$Q(x) = x^3 + 3x + 1 \longrightarrow$ grau de $Q(x) = 3$

grau de $P(x) >$ grau de $Q(x)$

Então:

$S(x) = P(x) + Q(x) = (x^4 + 2x^3 - 2) + (x^3 + 3x + 1) =$
$x^4 + 3x^3 + 3x - 1 \longrightarrow$ grau: 4

b) Sejam os polinômios:

$P(x) = x^4 + 2x^3 \longrightarrow$ grau de $P(x) = 4$

$Q(x) = -x^4 + 5x^2 \longrightarrow$ grau de $Q(x) = 4$

Grau de $P(x)$ = grau de $Q(x)$

Então:

$S(x) = P(x) + Q(x) = (x^4 + 2x^3) + (-x^4 + 5x^2) =$
$2x^3 + 5x^2 \longrightarrow$ grau: 3

$D(x) = P(x) - Q(x) = (x^4 + 2x^3) - (-x^4 + 5x^2) =$
$2x^4 + 2x^3 - 5x^2 \longrightarrow$ grau: 4

Importante saber

Sejam os polinômios **P(x)** de grau **n**, **Q(x)** de grau **m**, **S(x) = P(x) + Q(x)** e **D(x) = P(x) – Q(x)**, então temos:

I. Se **n > m**, o grau de **S(x)** e o grau de **D(x)** são iguais a **n**.

II. Se **n = m**, o grau de **S(x)** e o grau de **D(x)** são iguais ou menores que **n**.

Exercícios

08. Dados os polinômios:

$P(x) = x^3 + 3x^2 + 4$

$Q(x) = 5x^2 - 7x$

$R(x) = -x^3 + 4x^2 - 1$

Determine:

a) $P(x) + Q(x)$

b) $P(x) + R(x)$

c) $Q(x) + R(x)$

09. Sendo os polinômios:

$A(x) = 2x^3 + 3x^2$

$B(x) = x^3 - x^2 + 7$, encontre:

a) $A(x) + B(x)$

b) $A(x) - 2 \,.\, B(x)$

Multiplicação de polinômios

Para multiplicarmos dois polinômios, devemos aplicar a propriedade distributiva entre eles.

Exemplo:

Sejam os polinômios:

$P(x) = x^2 + 5 \longrightarrow$ grau $n = 2$

$Q(x) = x + 1 \longrightarrow$ grau $m = 1$

Então:

$M(x) = P(x) \,.\, Q(x) = (x^2 + 5) \,.\, (x + 1) = x^3 + x^2 + 5x + 5$
$\longrightarrow$ grau: 3

Se **P(x)** é um polinômio de grau **n**, **Q(x)** é um polinômio de grau **m** e **M(x) = P(x) . Q(x)**, então o grau de **M(x)** é **n + m**.

Exercício

10. Dados os polinômios $P(x) = x^4 + x^3 - 1$, $Q(x) = x^2 - x$ e $R(x) = x^3 + 2x^2$, calcule:

a) $P(x) \,.\, Q(x)$

b) $P(x) \,.\, R(x)$

c) $Q(x) \,.\, R(x)$

d) $P(x) + Q(x) + R(x)$

e) $P(x) . Q(x) + R(x)$

f) $[Q(x)]^2 + P(x)$

Testes

01. Se $P(x) = x^3 - x + 2$, calcule $P(-1) + P(0)$.
a) 2
b) 0
c) 4
d) 1
e) – 1

02. Dado $P(x) = x^3 - 2$, calcular $[P(-1)]^2$.
a) 2
b) 5
c) 3
d) – 9
e) 9

03. Determinar m de modo que –2 seja um zero (ou raiz) de $P(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + m$.
a) 3
b) 5
c) – 8
d) 8
e) 10

04. Sendo $P(x) = x^3 + x^2$, determine $P(x) + P(-x)$.
a) $2x^3$
b) $2x^3 + x^3$
c) $2x^2$
d) $-2x^2$
e) $x^3 - x^2$

05. (UFRN) Para qualquer número inteiro **n**, se $P(n) = 1 - n + n^2 - n^3$, então $P(-1)$ é igual a:
a) 2
b) 0
c) – 2
d) 4
e) 3

06. Sabendo que **a**, **b** e **c** são tais que $x^2 - 2x + 1 = (a + b)x^2 + (a + b + c)\,x + a + 2$ é uma identidade, o valor de a + b + c é:
a) 4
b) – 6
c) 10
d) – 2
e) 8

07. (PUC-SP) Os valores de **m**, **n**, **p** de modo que sejam idênticos os polinômios:
$P_1(x) = (m + n + p)x^4 - (p + 1)x^3 + mx^2 + (n - p)x + n$ e $P_2(x) = 2mx^3 + (2p + 7)x^2 + 5mx + 2m$ são, respectivamente:
a) 1, 2, –3
b) 2, 3, 1
c) – 1, 2, 2
d) 2, 1, –3
e) 1, –3, 2

08. (UFRGS) Se P(x) é um polinômio de grau 5, então o grau de $[P(x)]^3 + [P(x)]^2 + 2P(x)$ é:
a) 3
b) 8
c) 15
d) 20
e) 30

09. (Mackenzie-SP) O polinômio
$P(x) = (m - 4)x^3 + (m^2 - 16)x^2 + (m + 4)x + 4$ é de grau 2:
a) se, e somente se, m = 4 ou m = –4;
b) se, e somente se, $m \neq 4$;
c) se, e somente se, $m \neq -4$;
d) se, e somente se, $m \neq 4$ e $m \neq -4$;
e) para nenhum valor de m.

10. Considerando a teoria dos polinômios, assinale a alternativa incorreta:
a) Se os polinômios $P(x) = 4x^4 - (r + 2)x^3 - 5$ e $Q(x) = sx^4 + 5x^3 - 5$ são idênticos, então o valor de $r^3 - s^3$ é –407.
b) Os valores de **k** e **m** para os quais se tem $x^2 + 4x - 5 = (x - k)^2 - m^2$ para qualquer que seja o valor de x são k = –2 e m = ± 3.
c) O valor de a + b que torna idêntico o polinômio $P(x) = x^2 - 2x - 6$ e $Q(x) = (x + a)^2 - b$ é 6.
d) O produto de dois polinômios do 3.º grau é necessariamente um polinômio do 6.º grau.
e) A soma de dois polinômios do 3.º grau é necessariamente um polinômio do 3.º grau.

Divisão de polinômios

Denomina-se divisão de um polinômio D(x) por um polinômio d(x) não nulo a operação que fornece um par de polinômios Q(x) e R(x) atendendo as seguintes condições:

$$\begin{array}{l|l} D(x) & d(x) \\ \cline{2-2} R(x) & Q(x) \end{array} \longrightarrow \boxed{D(x) = d(x)\ .\ Q(x) + R(x)}$$

Onde:
D(x): Dividendo
d(x): Divisor
Q(x): Quociente
R(x): Resto

Propriedades

- Grau de **Q(x)** = grau de **D(x)** – grau de **d(x)**.
- Grau de **R(x)** ≤ grau de **d(x) – 1** ou **R(x)** é **nulo**.
- Se **R(x) = 0**, então diz-se que **D(x)** é **divisível por d(x)**.

Exemplo:

Seja a divisão onde o dividendo é do grau 9, o divisor é do grau 4 e o resto é não nulo.

Então:
Grau do quociente Q(x) = 9 – 4 = 5
Grau do resto R(x) ≤ 4 – 1 ⟶ grau R(x) ≤ 3

Divisibilidade de dois polinômios

Um polinômio é divisível por outro quando o resto da divisão entre eles é zero.

Exemplo:

$x^2 - 6x + 8$ é divisível por $x - 2$ por 3. O resto é zero.

$$\begin{array}{r|l} x^2 - 6x + 8 & x - 2 \\ \cline{2-2} -x^2 + 2x & x - 4 \\ \cline{1-1} -4x + 8 & \\ +4x - 8 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Curiosidade

Este método de divisão é denominado **método da chave**.

Dispositivo Briot-Ruffini

É uma forma mais simples de dividir dois polinômios quando se conhece as raízes do divisor. Este método trabalha apenas com os coeficientes do dividendo e as raízes do divisor.

No exemplo anterior, tem-se $(x^2 - 6x + 8) : (x - 2)$.

Neste dispositivo temos o diagrama abaixo com os coeficientes do dividendo:

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & -6 & 8 \\ \hline & & & \end{array}$$

Como 2 é raiz do divisor, tem-se:

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & -6 & 8 \\ \hline 2 & & & \end{array}$$

"Abaixando" o 1, temos que multiplicá-lo pela raiz e somá-lo ao coeficiente. Este procedimento repete-se até chegar ao último coeficiente.

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & -6 & 8 \\ \hline 2 & 1 & -4 & 0 \end{array}$$

Com isso reduz a ordem do polinômio em uma unidade e temos o resto zero.

Como os coeficientes são 1 e –4, o quociente é x – 4.

Exercícios

11. Efetue a divisão dos polinômios:

a) $(x^3 + 3x^2 + 7x - 1) : (x^2 + 1)$

b) $(x^4 + 3x^3 + 8x + 3) : (x^2 + x)$

12. Determine o quociente e o resto na divisão dos polinômios:

$(x^2 + 4x + 5) : (x - 1)$

a) Pelo método da chave:

$$\begin{array}{l|l} x^2 + 4x + 5 & x - 1 \\ \cline{2-2} \end{array}$$

b) Pelo processo de Briot-Ruffini:

1	1	4	5

13. Calcule o quociente e o resto pelo processo de Briot-Ruffini:

a) $(x^3 + 5x^2 - x + 7) : (x - 2)$

$Q(x) =$

$R =$

b) $(x^4 + x^3 + 2x^2 - 1) : (x + 1)$

$Q(x) =$

$R =$

c) $(x^3 - 5) : (x - 2)$

$Q(x) =$

$R =$

14. Verifique se o polinômio $P(x) = 2x^3 + 5x^2 - x - 6$ é divisível por $(x - 1) . (x + 2)$.

1	2	5	–1	–6
–2				

Propriedades das raízes de dois polinômios

Propriedade: P(x) será divisível por B(x) se as raízes de B(x) também forem raízes de P(x).

Exemplo:

Verifique se $P(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 - 2x - 12$ é divisível por $B(x) = x + 2$.

Raízes de B(x):

$(x + 2) = 0$

$x_1 = -2$

Note que –2 também é raiz de P(x):

$P(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 - 2x - 12$

$P(-2) = (-2)^4 - (-2)^3 - 4 . (-2)^2 - 2 . (-2) - 12 = 0$

Logo, P(x) é divisível por B(x).

Exercício

15. Verifique se o polinômio $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ é divisível por $(x - 1)$.

Teorema do resto

O resto da divisão de um polinômio P(x) por x – a é r = P(a).

$$\begin{array}{l|l} P(x) & x - a \\ \hline R & Q(x) \end{array}$$

$\boxed{R = P(a)}$

Se o polinômio P(x) é divisível por x – a, então P(a) = 0.

Exemplo:

Calcule o resto da divisão de

$P(x) = x^3 + 2x - 1$ por $x - 3$.

Resto $= P(3) = (3)^3 + 2(3) - 1$

$P(3) = 27 + 6 - 1 = 32$

Exercícios

16. Determine o resto da divisão do polinômio $P(x) = x^3 + 2x^2 + 3$ por:

a) $x - 1$

b) $x + 2$

17. Para que valor de **m** o polinômio $P(x) = x^3 + x + m - 1$ é divisível por $x - 2$.

18. Verifique se o polinômio $P(x) = x^4 + x^2 - x + 1$ é divisível por $x - 1$.

19. Para que valor de **a** os polinômios $P(x) = x^2 + ax + 2$ e $Q(x) = x^2 - ax + 4$ têm o mesmo resto na divisão por $x - 1$?

Testes

11. Para que valor de **m** o polinômio $P(x) = x^3 + x^2 + m$ é divisível por $x - 2$?

a) 10
b) 12
c) –10
d) –12
e) 0

12. (UFSM-RS) Para que a divisão de $2x^3 - 3x + m$ por $x + 2$ tenha resto nulo, o valor de **m** deve ser:

a) 6
b) 10
c) –6
d) 0
e) 20

13. Calcule **a** se o resto da divisão de $P(x) = ax^3 + ax + 3$ por $x - 1$ for igual a 13.

a) 10
b) 1
c) –5
d) 0
e) 5

14. Sabendo-se que o polinômio $P(x) = x^2 - ax + 6$ é divisível por $Q(x) = x - 2$, pode-se afirmar que o valor de **a** é:

a) 4
b) 5
c) 6
d) 7
e) 8

15. Assinale a soma das proposições verdadeiras:

01) O resto da divisão de $kx^2 + x - 1$ por $x + 2k$ é $4k^3 - 2k - 1$.
02) O resto da divisão de $x^n - a^n$ por $x - a$ é zero.
04) O valor de **a**, para que o resto da divisão do polinômio $p(x) = -ax^3 - 2x + 1$, por $x - 3$ seja 4, é $-\frac{1}{3}$.
08) O resto da divisão de P(x) por $ax - b$ é $P\left(\frac{a}{b}\right)$.
16) Se o resto da divisão do polinômio $f = 2x^3 - x^2 + kx + 1$ por $x + 1$ é igual a 3, o valor de k é –5.
32) Se $f = x^3 + 4x^2 + (1 - 3m)x - 3$ é divisível por $x - 1$, então $f\left(\sqrt{2}\right)$ é um número primo.

A resposta correta é:

a) 55
b) 50
c) 48
d) 37
e) 52

16. (BAHIA)

–2	1	p	6	38
	1	–6	q	r

O quadro acima é o dispositivo prático de Briot-Ruffini da divisão de um polinômio P(x) por um binômio. A relação existente entre **p**, **q** e **r** é:

a) $r = 5p + q$
b) $r = 4p + q$
c) $r = 2p + 2q$
d) $r = p + 3q$
e) $r = p + 5q$

17. (UNAERP) Se $P(x) = 3x^3 - 5x^2 + 6x + a$ é divisível por $x - 2$, então os valores de a e de P(2) são, respectivamente:

a) –16 e –2
b) –16 e 2
c) 16 e –2
d) 16 e 2
e) –16 e zero

18. (CESGRANRIO-RJ) Se o polinômio $P(x) = 2x^3 - 4x + a$ é divisível por $D(x) = x - 2$, o valor de a é:

a) –8
b) –6
c) –4
d) –2
e) +2

19. (UFRGS) Considere as afirmações:
I. Se P(X) e Q(X) são polinômios de grau n, então P(x) + Q(x) é um polinômio de grau 2n.
II. O resto da divisão de $p(x) = mx^3 + x^2 - x$ por $Q(x) = x - 1$ é igual a **m**.
III. O produto de um polinômio de grau **n** por (x – a) é um polinômio de grau n + 1.

Quais são corretas?
a) Apenas I.
b) Apenas I e II.
c) Apenas III.
d) Apenas II e III.
e) I, II e III.

20. (PUC-MG) O polinômio $P(x) = x^3 - 5x^2 + px + 2$ é divisível por x + 2. O valor de p é:
a) –15
b) –13
c) –8
d) 8
e) 13

21. (UFRGS) Se $P(x) = 3x^3 - cx^2 + 4x + 2c$ é divisível por x + 1, então:
a) c = –1/3
b) c = 1/3
c) c = 7
d) c = 39
e) c = –7

22. (PUC-RJ) O resto da divisão do polinômio $x^3 + px + q$ por x + 1 é 4 e o resto da divisão deste mesmo polinômio por x – 1 é 8, o valor de p é:
a) 5
b) –4
c) 0
d) 1
e) 8

Leitura Complementar

Símbolos e notações matemáticas

Apropriadamente, já se definiu a Matemática como a "rainha e serva de todas as ciências". E o apanágio de sua majestade é o rigor, a lógica, a harmonia e sua linguagem precisa, universal e sincopada.

Sabemos que os gregos antigos promoveram um grande desenvolvimento à Geometria Plana e Espacial, mas não dispunham de uma notação algébrica ou simbologia adequadas.

Até o século XVI, toda a expressão matemática se fazia de uma forma excessivamente "verbal ou retórica".

Por exemplo em 1591, Viète, para representar a equação quadrática $5A^2 + 9A - 5 = 0$, escrevia em bom latim:

5 in A quad. et 9 in A planu minus 5 aequatur 0. (5 em A quadrado e 9 em A plano menos 5 é igual a zero.)

Além da prolixidade de comunicação entre os matemáticos, havia outras dificuldades, pois se utilizava de notações diferentes para indicar as mesmas coisas.

O maior responsável por uma notação matemática mais consistente e utilizada até hoje foi Leonhard Euler (1707-1783).

Recordemos as principais: **f(x)** (para indicar função de x); Σ (somatória e provém da letra grega sigma, que corresponde ao nosso S); **i** (unidade imaginária igual a $\sqrt{-1}$); **e** (base do logaritmo neperiano e igual a 2,7182...); **log x** (para indicar o logaritmo de x); as letras minúsculas **a**, **b**, **c** para indicarem os lados de um triângulo e as letras maiúsculas **A**, **B**, **C** para os ângulos opostos. A letra $\pi = 3{,}1415...$ que havia sido utilizada por William Jones em 1706, teve o uso consagrado por Euler.

Euler nasceu em Basileia, Suíça, e recebeu educação bastante eclética: Matemática, Medicina, Teologia, Física, Astronomia e Línguas ocidentais e orientais.

Extremamente profícuo, insuperável em produção matemática, Euler escrevia uma média de 800 páginas por ano e publicou mais de 500 livros e artigos. Em plena atividade intelectual, morreu aos 76 anos, sendo que os últimos dezessete anos passou em total cegueira (consequência de catarata). Mesmo assim, continuou ditando aos seus filhos (eram treze).

A implementação dos símbolos mais adequados foi acontecendo naturalmente ao longo de décadas ou séculos, sob a égide da praticidade e do pragmatismo. É evidente, porém, que pouco se pode afirmar com precisão nesta evolução.

Alguns exemplos:

Símbolo de +

Uma explicação razoável é que, até então, a adição de dois números, por exemplo 3 + 2 era representada por 3 **et** 2. Com o passar dos anos, a conjugação latina **et** (que significa e) foi sincopada para t, de onde se originou o sinal de +.

Símbolo de –

Pode ter sido fruto da evolução abaixo exposta, conforme se observa nos escritos dos matemáticos italianos da Renascença:

1.º) 5 minus 2 = 3 (*minus* em latim significa menos).

2.º) 5 $\bar{m}$ 2 = 3 ($\bar{m}$ é abreviatura de *minus*)

3.º) 5 – 2 = 3 (sincopou-se o m da notação $\bar{m}$)

Símbolo de X

É provável que seja originário de uma alteração do símbolo de +.

Símbolo da ÷ (divisão)

Fibonacci (séc. XII) emprega a notação $\frac{a}{b}$, já conhecida pelos árabes. A notação a:b é atribuída a Leibniz em 1648.

Símbolo de < ou >

O inglês Thomas Harriot (1560-1621) foi o introdutor dos símbolos de < ou > para indicar maior ou menor, respectivamente. No entanto, os símbolos ≤ ou ≥ surgiram mais tarde, em 1734, com o francês Pierre Bouguer.

Símbolo π

É a inicial da palavra grega perijereia, que significa circunferência. Sabemos que π = 3,1415926535... é um número irracional e é a razão entre o comprimento da circunferência pelo seu diâmetro.

Símbolo de $\sqrt{\ }$

Apareceu pela primeira vez na obra *Die Coss* (1525), do matemático alemão C. Rudolff. Este sugeria o símbolo por sua semelhança com a primeira letra da palavra latina *radix* (raiz).

Símbolo de =

Tudo indica que o sinal de igualdade (=) foi introduzido por Robert Recorde (~1557), pois nada é *moare equalle a paire de paralleles* (nada é mais igual que um par de retas paralelas).

Disponível em: < www.geometriaanalitica.com.br>
Acesso em: 14 jul. 2010.

Equações algébricas

Equação geral

Chama-se equação algébrica ou polinomial, de grau **m** na variável **x**, toda equação redutível à forma:

$a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + ... + a_m = 0$ com $\mathbf{m} \in \mathbf{N}$ e $\mathbf{a \neq 0}$

Sendo $a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + ... + a_m$ um polinômio de grau **m** na variável **x**.

Teorema fundamental da álgebra

Toda equação algébrica de grau m ≥ 1 admite **m** e somente **m** ⟶ raízes complexas (reais ou imaginárias).

Exemplo:

A equação $x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 2x + 1 = 0$ admite **4 raízes complexas** (reais ou imaginárias).

Decomposição de um polinômio em fatores do 1.º grau

Todo polinômio $P(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + ... + a_m$ de grau m ≥ 1, pode ser decomposto em m fatores do 1.º grau, multiplicados pelo coeficiente do termo de maior grau a_0, ou seja, $\mathbf{P(x) = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) ... (x - \alpha_m)}$, onde $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ são raízes da equação P(x) = 0.

Exercício

20. Forme a equação algébrica de raízes iguais a 2, 3 e – 4.

Raízes múltiplas

As raízes de P(x) = 0 podem ser distintas ou não. Assim, se houver duas raízes iguais, teremos uma raiz de multiplicidade 2 (raiz dupla). Se houver três raízes iguais, teremos uma raiz de multiplicidade 3 (raiz tripla).

Exemplos:

- Forme a equação algébrica de raízes 2 (simples) e 1 (dupla).

$(x-2)^1 \cdot (x-1)^2 = 0$

$(x-2) \cdot (x^2-2x+1) = 0$

$x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$

- Quais são as raízes da equação $(x-3)^2 \cdot (x+2)^3 = 0$.

$3 \longrightarrow$ raiz dupla

$-2 \longrightarrow$ raiz tripla

Raízes nulas

Uma equação desprovida de termo independente admite pelo menos uma raiz nula.

Exemplo:

A equação $x^4 - 3x^3 + x^2 = 0$ admite duas raízes nulas.

Exercícios

21. Quais são as raízes da equação $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$?

22. Para que valor de **m** a equação $x^3 - x^2 + (m-7)x = 0$ admite duas raízes nulas?

Raízes irracionais

Uma equação polinomial de **coeficientes racionais** que admite uma raiz irracional do tipo $a+\sqrt{b}$ admitirá também a raiz $a-\sqrt{b}$, conjugada da primeira.

Exemplo:

Se a equação de coeficientes racionais admite $3+\sqrt{2}$ como raiz, vai admitir $3-\sqrt{2}$ como raiz.

Raízes imaginárias

- Se uma equação algébrica de **coeficientes reais** admite o complexo $z = a + bi$ $(b \neq 0)$ como raiz, então também admite a raiz $\overline{z} = a - bi$, conjugado da primeira.
- Numa equação polinomial de **coeficientes reais**, é par o número de raízes imaginárias.
- Uma equação polinomial de **coeficientes reais** e grau ímpar admite pelo menos uma raiz real.

Exemplo:

Determine as raízes da equação $x^3 + 2x^2 + 2x = 0$.

Resolução:

$x^3 + 2x^2 + 2x = 0$

$x(x^2 + 2x + 2) = 0$

$\mathbf{x' = 0}$

$x^2 + 2x + 2 = 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4.1.2}}{2.1}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

$$x = \frac{-2 \pm 2i}{2}$$

$x'' = -1 + i$

$X''' = -1 - i$

O conjunto solução é $\mathbf{S = \{0, -1 + i, -1 - i\}}$.

Exercícios

23. Se $P(x) = 0$ é uma equação do 2.º grau de coeficientes reais, de raiz $(3 - 2i)$, qual é a outra raiz dessa equação?

24. Qual é o menor grau da equação de coeficientes reais de raízes $3 + i$ e 4?

Testes

23. (UNIFESP) Os números complexos $1 + i$ e $1 - 2i$ são raízes de um polinômio com coeficientes reais, de grau 8.

O número de raízes reais deste polinômio, no máximo, é:

a) 2

b) 3

c) 4

d) 5

e) 6

24. Os valores de a e b para que a equação $x^4 + 3x^3 + (2b - 4)x^2 + (ab + 4)x = 0$ tenha uma raiz dupla igual a zero são, respectivamente:

a) 2, – 2
b) 4, – 4
c) qualquer
d) – 5, 5
e) 3, 3

25. O polinômio cujas raízes são 2, –1 e 3, pode ser:

a) $(x - 2)(x + 1)(x - 3)$
b) $(x - 2)(x - 1)(x - 3)$
c) $(x + 2)(x + 1)(x + 3)$
d) $(x + 2)(x - 1)(x - 3)$
e) $(3x - 2)(x + 1)(x - 3)$

26. (CESCEM-SP) Uma equação do 3.º grau cujas raízes são 1, 2 e 3 é:

a) $x^3 + 6x^2 - 11x + 6 = 0$
b) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$
c) $x^3 - 6x^2 + 7x - 6 = 0$
d) $x^3 - 6x^2 - 7x + 6 = 0$
e) $x^3 - 2x^2 + 3x - 6 = 0$

27. Para que a equação $5x^2 - (2m - n)x + (2m - 2) = 0$ admita uma só raiz nula, devemos ter:

a) $m = -1$ e $n \neq 2$
b) $m = +1$ e $n \neq -2$
c) $m = 1$ e $n \neq 2$
d) $m \neq 2$ e $n \neq 2$
e) $m \neq \pm 1$

Relações entre coeficientes e raízes ou relações de Girard

1.º Caso

Equação do 2.º grau (raízes x_1 e x_2)
Dada: $ax^2 + bx + c = 0$ (÷ a)

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Então:

$$\boxed{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}} \qquad \boxed{x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}}$$

Exemplos:

Calcule a soma e o produto das raízes de $x^2 - 3x + 2 = 0$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \text{ (soma)} \\ x_1 \cdot x_2 = 2 \text{ (produto)} \end{cases}$$

Exercício

25. Calcule $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, sendo a e b raízes da equação $x^2 - 7x + 2 = 0$.

2.º Caso

Equação do 3.º grau (raízes x_1, x_2 e x_3)
Dada: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ (: a)

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$$

Então:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = \frac{c}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{d}{a}$$

Exemplo:

Determinar a soma e o produto das raízes da equação $x^3 - 5x^2 + 6x - 8 = 0$.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 6 \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 8 \end{cases}$$

Exercícios

26. Encontre a soma e o produto das raízes de $P(x) = x^3 - 8x^2 + 7x + 9$.

27. (PUC-MG) No polinômio $P(x) = x^3 - x^2 + 4x - 4$, uma das raízes é 2i. Então, a raiz real de P(x) é:

28. Se a, b e c são as raízes da equação $x^3 - 2x^2 + 5x - 8 = 0$, calcule $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

3.º Caso

Equação do 4.º grau (raízes x_1, x_2, x_3 e x_4)
Dada: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ ($\div$ a)
Então:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \frac{c}{a}$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_3x_4 + x_1x_2x_4 + x_2x_3x_4 = -\frac{d}{a}$$

$$x_1x_2x_3x_4 = \frac{e}{a}$$

Exemplo:
Determine a soma das raízes de
$x^4 - 3x^3 + 5x - 1 = 0$
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4$

Exercícios

29. Encontre a soma das raízes do polinômio $P(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$.

30. Encontre o produto das raízes do polinômio $P(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16$.

Prováveis raízes racionais

Se um número racional N/D, sendo N e D primos entre si, é raiz da equação algébrica racional inteira de coeficientes inteiros $a_0x^m + a_1x^{m-1} + ... + a_m = 0$, então N é um divisor de a_m e D é um divisor de a_0.

Constituem raízes **racionais** as raízes **inteiras** e as raízes **fracionárias**.

Exemplos:
Quais são as prováveis raízes racionais da equação $2x^3 - x^2 + x - 7 = 0$?
P.R.R.I.: $\pm 1, \pm 7$
P.R.R.F.: $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{7}{2}$

Resolva a equação $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$.
P.R.R.I: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

	1	–6	11	6
1	1	–5	6	0
2	1	–3	0	
3	1	0		

Raízes: 1, 2, 3

Resolva a equação $x^3 - 6x^2 - x + 30 = 0$.
P.R.R.I. $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 10, \pm 15, \pm 30$

	1	–6	–1	30
3	1	–3	–10	0
5	1	2	0	
–2	1	0		

Raízes: 3, 5, –2

Exercícios

31. (CESGRANRIO-RJ) Se $x^3 - 2x^2 + 5x - 4 = 0$ tem uma raiz igual a 1, calcule as outras duas raízes da equação.

	1	–2	5	–4

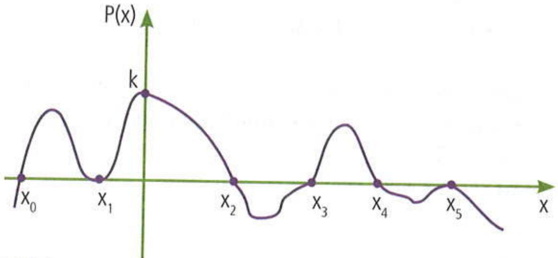
32. (UEL-PR) A multiplicidade da raiz 1 na equação $x^5 - 8x^4 + 24x^3 - 34x^2 + 23x - 6 = 0$ é:

	1	–8	24	–34	23	–6

Multiplicidade de uma raiz é a quantidade de vezes que esta se repete no polinômio.

Gráficos de funções polinomiais

Seja o gráfico da função polinomial P(x):

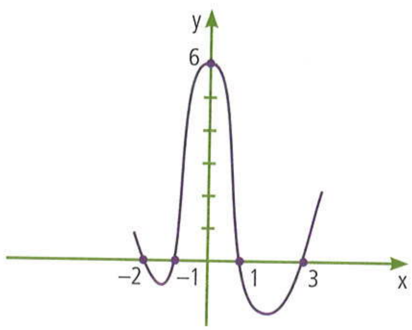


Importante saber

- Pontos de tangência como x_1 ou x_5 indicam raízes de multiplicidade par.
- Pontos de intersecção com inflexão da curva como x_3 ou x_4 indicam raízes de multiplicidade ímpar.
- Pontos de intersecção como x_0 ou x_2 indicam raízes simples.
- Ponto de intersecção da curva com o eixo y ou P(x) indica uma ordenada igual ao termo independente de **x**.

Exemplo:

Esboço do gráfico da função $y = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$ cujas raízes são $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$ e $x_4 = 3$.



Testes

28. (UEL-PR) As soluções de uma das equações abaixo, para um valor adequado de **k**, são –2, 3 e 5. Qual é essa equação?

a) $x^3 + 6x^2 - 31x + k = 0$
b) $x^3 + kx^2 - x + 36 = 0$
c) $2x^3 + 6x^2 - x + k = 0$
d) $2x^3 - 12x^2 - 2x + k = 0$
e) $2x^3 - 12x^2 + kx + 20 = 0$

29. (UTFPR) Os valores de **p** e **q** para que **i** seja raiz da equação $2x^3 + px^2 + qx + 2 = 0$ são, respectivamente:

a) 2 e 2
b) –1 e 0
c) 1 e –1
d) $\frac{1}{2}$ e 2
e) $\frac{1}{2}$ e 0

30. Sobre polinômios e equações algébricas:

( ) Uma das raízes do polinômio $x^3 + 2x^2 - 9x - 18$ é –2. A soma das outras raízes é zero.
( ) A condição para que o trinômio $x^2 + ax + b$ seja divisível por $x - 1$é que $a + b + 1 = 0$.
( ) A soma dos quadrados das raízes da equação $x^3 - x^2 - 9x + 9 = 0$, que tem uma raiz igual a 1, é 192.
( ) Na equação $(x - 3)(x - 1)^3(x - 5)^4 = 0$, os números 3, 1 e 5 são, respectivamente, raízes de multiplicidade 1, 3 e 4.
( ) Uma das raízes do polinômio $P(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ é $x = 1$. O produto das outras duas raízes é 1.
( ) O polinômio $P(x) = 3x^3 - 13x^2 + 17x - 15$ tem uma das raízes igual a 3, logo ele é divisível por $x - 3$.

A sequência correta é:

a) V, V, F, F, V, V
b) V, V, F, V, V, V
c) V, V, F, V, V, F
d) V, V, V, F, V, V
e) V, V, F, V, F, V

31. (UEPG-PR) Sabendo-se que 2 é uma raiz dupla do polinômio $P(x) = x^3 - 5x^2 + 8x + a$, então $P(-a/4)$ vale:

a) 1
b) – 8
c) 0
d) – 16
e) 6

32. (UFPR) Seja p(x) um polinômio inteiro em **x**, de grau **n**, com coeficientes reais não nulos, é correto afirmar que:

a) Se uma das raízes de p(x) é 1 + i, as demais raízes são reais.

b) Se **n** é ímpar, todas as raízes de p(x) podem ser raízes reais.
c) Se p(a) = 0, então p(x) é divisível por x – a.
d) As alternativas corretas são **a**, **b** e **c**.
e) As alternativas corretas são **b** e **c**.

33. (UFSCAR-SP) Sabendo-se que a soma de duas raízes da equação $x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$ é igual a 5, pode-se afirmar a respeito das raízes que:
a) são todas iguais e não nulas;
b) somente uma raiz é nula;
c) as raízes constituem uma progressão geométrica;
d) as raízes constituem uma progressão aritmética;
e) nenhuma raiz é real.

34. (FUVEST-SP) As três raízes de $9x^3 - 31x - 10 = 0$ são **p**, **q** e 2. O valor de $p^2 + q^2$ é:
a) 5/9
b) 10/9
c) 20/9
d) 26/9
e) 31/9

35. (UEL-PR) A equação $2x^3 - 5x^2 + x + 2 = 0$ tem três raízes reais. Uma delas é 1. As outras duas são tais que:
a) ambas são números inteiros;
b) ambas são números negativos;
c) estão compreendidas entre –1 e 1;
d) uma é o oposto do inverso da outra;
e) uma é a terça parte da outra.

36. (Mackenzie-SP) Dividindo-se $P(x) = x^2 + bx + c$ por x – 1 e por x + 2, obtém-se o mesmo resto 3. Então, a soma das raízes de P(x) = 3 é:
a) –3
b) –2
c) –1
d) 1
e) 3

37. (FUVEST-SP) Sabe-se que –1 é raiz do polinômio $f = x^3 + x^2 - 2x - 2$. As demais raízes desse polinômio são números.
a) Irracionais.
b) Não reais.
c) Racionais não inteiros.
d) Inteiros positivos.
e) Inteiros e opostos entre si.

38. (UFPR) Sobre o polinômio
$P(x) = x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 5x + d$, onde d é número real, é correto afirmar:
a) Se d = 16, então P(x) é o desenvolvimento de $(x - 2)^4$.
b) Se d = 0, então zero é uma raiz de P(x).
c) Se 1 for raiz de P(x), então d = 15.
d) Se d = –21, então P(x) é divisível por x + 1.
e) As alternativas **b** e **d** estão corretas.

39. (FGV) Se o polinômio $P(x) = x^3 - kx^2 + 6x - 1$ for divisível por (x – 1), ele também será divisível por:
a) $x^2 - 5x + 1$
b) $x^2 - 5x + 3$
c) $x^2 + 5x + 1$
d) $x^2 + 5x + 3$
e) $x^2 - 5x + 5$

Respostas

Exercício 01:

a) $P(x) = 0 \,.\, x^3 + 3x^2 - 7x + 1 = 3x^2 - 7x + 1$ (2.º Grau);
b) 3.º Grau.

Exercício 02:

a) $P(2) = (2)^3 + 2 + 1 = 11$;
b) $P(-1) = (-1)^3 + (-1) + 1 = -1$.

Exercício 03: $(1)^2 + a(1) + 4 = 7$
$1 + a + 4 = 7$
$a = 2$

Exercício 04:

a) $x^2 - 3x + 2 = 0$
$\begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$

b) $x^2 - 7x = 0$
$x = 0$
$x = 7$

Exercício 05:

$\begin{cases} m + n = 7 \\ m = 4 \end{cases}$

$4 + n = 7 \quad n = 3$

Exercício 06: $a = 6$, $b = -6$, $c = 1$

Exercício 07: $a = 3$, $b = -3$, $c = -2$

Exercício 08: a) $x^3 + 8x^2 - 7x + 4$ / 3º grau;
b) $7x^2 + 3$ / 2.º grau; c) $-x^3 + 9x^2 - 7x - 1$ / 3.º grau.

Exercício 09: a) $3x^3 + 2x^2 + 7$ / 3.º grau; b) $5x^2 - 14$ / 2.º grau.

Exercício 10:

a) $x^6 - x^4 - x^2 + x$ / 6º grau;
b) $x^7 + 3x^6 + 2x^5 - x^3 - 2x^2$ / 7.º grau;
c) $x^5 + x^4 - 2x^3$ / 5º grau;
d) $x^4 + 2x^3 + 3x^2 - x - 1$ / 4.º grau;
e) $x^6 - x^4 + x^3 + x^2 + x$ / 6º grau;
f) $2x^4 - x^3 + x^2 - 1$ / 4.º grau.

Exercício 11:

a)
$$\begin{array}{r|l} \cancel{x^3} + 3x^2 + 7x - 1 & x^2 + 1 \\ \cline{2-2} -\cancel{x^3} \qquad\quad - x & x + 3 \\ \hline 3\cancel{x^2} + 6x - 1 & \\ -3\cancel{x^2} \qquad - 3 & \\ \hline 6x - 4 & \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r|l} x^4 + 3x^3 + 0x^2 + 8x + 3 & x^2 + x \\ \cline{2-2} -x^4 - x^3 \qquad\qquad\qquad & x^2 + 2x - 2 \\ \hline 2\cancel{x^3} + 0x^2 + 8x + 3 & \\ -2\cancel{x^3} + 2x \qquad\qquad & \\ \hline -2\cancel{x^2} + 8x + 3 & \\ +2\cancel{x^2} + 2x \qquad & \\ \hline 10x + 3 & \end{array}$$

Exercício 12:

a)
$$\begin{array}{r|l} x^3 + 4x^2 + x + 3 & x - 1 \\ \cline{2-2} -x^3 + x^2 \qquad\qquad & x^2 + 5x + 6 \\ \hline 5x^2 + x + 3 & \\ -5x^2 + 5x \qquad & \\ \hline 6x + 3 & \\ -6x + 6 & \\ \hline 9 & \end{array}$$

b)

1	1	4	1	3
	1	5	6	9

$Q(x) = x^2 + 5x + 6$
$R = 9$

Exercício 13:

a)

2	1	5	–1	7
	1	7	13	33

$Q(x) = x^2 + 7x + 13$
$R = 33$

b)

–1	1	1	2	0	–1
	1	0	2	–2	1

$Q(x) = x^3 + 2x - 2$
$R = 1$

c)

2	1	0	0	–5
	1	2	4	3

$Q(x) = x^2 + 2x + 4$
$R = 3$

Exercício 14:

	2	7	6	0
	2	3	0	

Sim, é divisível.

Exercício 15:

1	1	–6	11	–6
2	1	–5	6	0
	1	–3	0	

Exercício 16: a) $P(1) = (1)^3 + 2(1)^2 + 3 = 6$;
b) $P(-2) = (-2)^3 + 2(-2)^2 + 3 = -8 + 8 + 3 = 3$.

Exercício 17:
$P(2) = (2)^3 + 2 + m - 1 = 0$
$m = -9$

Exercício 18:
$P(1) = 1 + 1 - 1 + 1 = 2$
Não é divisível.

Exercício 19:
$P(1) = Q(1)$
$1 + a + 2 = 1 - a + 4$
$2a = 2$
$a = 1$

Exercício 20:
$(x - 2) . (x - 3) . (x + 4) = 0$
$(x^2 - 5x + 6) (x + 4) = 0$
$x^3 - 5x^2 + 6x + 4x^2 - 20x + 24 = 0$
$x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$

Exercício 21:
$x(x^2 - 5x + 6) = 0$
$x = 0$
$x^2 - 5x + 6 = 0$
$x = 2, x = 3$

Exercício 22:
$m - 7 = 0$
$m = 7$
$x^3 - x^2 = 0$
Duas raízes nulas.

Exercício 23:
$3 - 2i \rightarrow 3 + 2i$

Exercício 24:
$3 \pm i$
$3 \pm \sqrt{2}$
4.º grau

Exercício 25: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a + b}{ab} = \frac{7}{2}$

Exercício 26: $S = 8$, $P = -9$

Exercício 27: Raízes: a, 2i, –2i
$a + (2i) + (-2i) = 1$
$a = 1$

Exercício 28: Raízes: a, b, c
$$\frac{ab + ac + bc}{abc} = \frac{5}{8}$$

Exercício 29: –4

Exercício 30: 16

Exercício 31:

1	1	–1	4	0

$x^2 - x + 4 = 0$
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{-15}}{2} \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{15}\,i}{2}$$

Exercício 32:

1	1	–7	17	–17	6	0
1	1	–6	11	–6	0	
1	1	–5	6	0		
2	1	–3	0			
3	1	0				

{1, 1, 1, 2, 3}

Gabarito

01) C	02) E	03) D	04) C	05) D	06) D
07) A	08) C	09) E	10) E	11) D	12) B
13) E	14) B	15) A	16) B	17) E	18) A
19) D	20) B	21) C	22) D	23) C	24) A
25) A	26) B	27) C	28) D	29) A	30) B
31) C	32) E	33) C	34) D	35) D	36) C
37) A	38) E	39) A			

Sumário

Matemática 9E

Avaliações

Anotações

Matemática

9 E

Geometria analítica

Fotolia

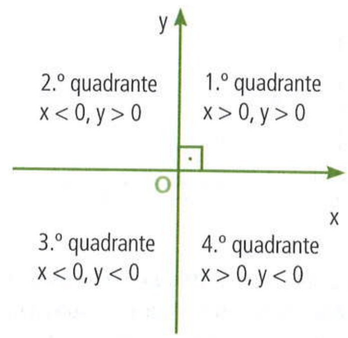
A geometria analítica estuda curvas e figuras por meio de suas equações e as analisa através de gráficos, existindo, portanto, uma integração entre a álgebra e a geometria.

Os seus principais idealizadores foram dois grandes matemáticos franceses, **René Descartes** e **Pierre de Fermat**. Deve-se a origem do nome **sistema cartesiano** a Descartes (*Cartesius* era o nome latino de Descartes).

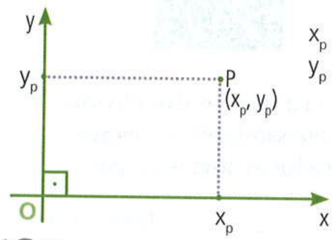
O princípio fundamental da geometria analítica é: em um referencial cartesiano plano, os pontos associados a pares ordenados de números reais, que satisfazem a uma equação de duas variáveis, em geral descrevem uma curva.

Sistema cartesiano ortogonal

O sistema cartesiano ortogonal, também conhecido por **plano cartesiano**, é formado por dois eixos perpendiculares entre si, e de mesma origem **O**. O eixo **x** (horizontal) é chamado de eixo das abscissas, e o eixo **y** (vertical) é também chamado eixo das ordenadas. Os eixos dividem o plano em quatro regiões denominadas **quadrantes**.



Para representarmos um ponto no plano cartesiano, utilizamos o conceito de par ordenado, em que o primeiro elemento do par representa o eixo das abscissas e o segundo elemento do par o eixo das ordenadas. Assim:

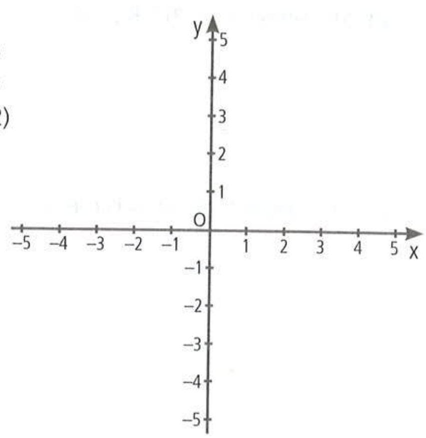


x_p = abscissa do ponto P.
y_p = ordenada do ponto P.

Exercício

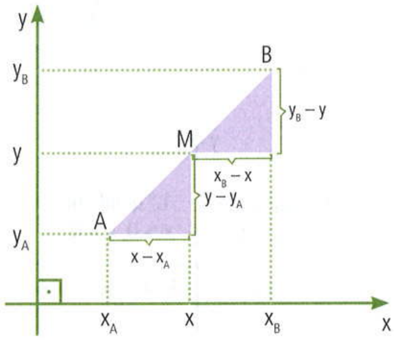
01. No plano cartesiano abaixo, localize os pontos indicados:

A (2, 3)
B (1, 5)
C (–2, 2)
D (–3, 4)
E (–4, –2)
F (3, –1)
G (4, 0)
H (0, –5)



Ponto médio de um segmento

Considere os pontos A (x_A, y_A) e B (x_B, y_B), representados no plano:



O ponto M (x, y) é denominado ponto médio do segmento $\overline{AB}$. Para encontrarmos suas coordenadas, utilizamos o Teorema de Tales, assim:

$x - x_A = x_B - x$ $\quad$ $y - y_A = y_B - y$

$x + x = x_A + x_B$ $\quad$ $y + y = y_A + y_B$

$2x = x_A + x_B$ $\quad$ $2y = y_A + y_B$

$$\boxed{x = \frac{x_A + x_B}{2}} \qquad \boxed{y = \frac{y_A + y_B}{2}}$$

"A matemática apresenta invenções tão sutis que poderão servir não só para satisfazer os curiosos como, também, para auxiliar as artes e poupar trabalho aos homens."

Fonte: Descartes

Exercícios

02. Determinar as coordenadas do ponto médio dos segmentos:

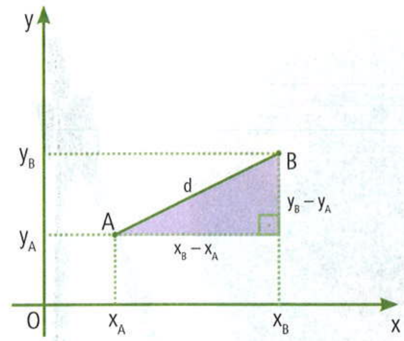
a) $\overline{AB}$, sendo A (4, 2) e B (6, 4).

b) $\overline{CD}$, sendo C (0, –4) e D (–6, –2).

03. Se **M** é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$, encontre as coordenadas de **B**, sendo A (2, 6) e M (3, 4).

Distância entre dois pontos no plano

Considerando dois pontos quaisquer A (x_A, y_A) e B (x_B, y_B), representados no plano cartesiano, temos:



Como o triângulo **ABC** é retângulo em **C**, podemos utilizar o Teorema de Pitágoras, assim:

$$d^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

$$\boxed{d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$$

Exercícios

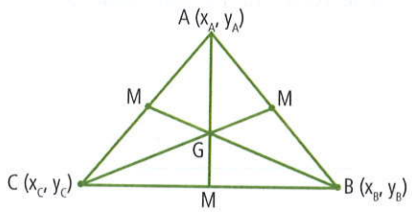
04. Calcular a distância entre os pontos A (1,1) e B (5, 4):

05. Dados os pontos P (2, 3) e Q (4, 5), determine a distância entre **P** e **Q**:

06. Determine as abscissas do ponto B (x, 4), sabendo que a distância de A a B é 10 e que A (5, 10):

Cálculo do baricentro de um triângulo

Definimos como sendo o baricentro de um triângulo G (x, y) a intersecção entre suas medianas.



Se o triângulo ABC é dado pelos seus vértices **A**, **B** e **C**, então:

$$x = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \qquad y = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

Exercícios

07. Calcular o baricentro do triângulo cujos vértices são: A (–1, 3); B (2, 2) e C (8, 1).

08. Dado o triângulo A (–1, –5); B (6, –2) e C (1, 1), as coordenadas do baricentro serão:

Testes

01. Ache as coordenadas de **M**, ponto médio do segmento $\overline{AB}$, sendo A (2, 2) e B (8, 12):
a) M (7, 5)
b) M (2, 12)
c) M (10, 14)
d) M (5, 7)
e) n.d.a.

02. (FMU-SP) As coordenadas do ponto médio do segmento de extremidades (5, –2) e (–1, –4) são:
a) (3, 1)
b) (1, 3)
c) (–3, 2)
d) (2, –3)
e) (3, 3)

03. (UFES) As coordenadas do ponto médio de um segmento AB são (–1, 2). Sabendo-se que as coordenadas do ponto A são (2, 5), então as coordenadas de B são:
a) (4, 1)
b) (–4, 1)
c) (4, –1)
d) (–1, –4)
e) n.d.a.

04. Determine a distância entre os pontos A (–2, 4) e B (4, –4):
a) 10 u.c.
b) 9 u.c.
c) 8 u.c.
d) 7 u.c.
e) 5 u.c.

05. (Cesgranrio-rj) A distância entre os pontos M (4, –5) e N (–1, 7) do plano **xoy** vale:
a) 14
b) 12
c) 8
d) 13
c) 9

06. (PUC-PR) A distância da origem do sistema cartesiano ao ponto médio do segmento de extremos (–2, –7) e (–4, 1) é:
a) $\sqrt{5}$
b) $2\sqrt{2}$
c) $2\sqrt{3}$
d) $3\sqrt{3}$
e) $3\sqrt{2}$

07. Determine as coordenadas do baricentro do triângulo **ABC**, sendo A (–1, 0); B (–2, 2) e C (6, 7):
a) G (1, 5)
b) G (1, 2)
c) G (1, 3)
d) G (–1, –3)
e) G (0, 2)

08. (Mackenzie-SP) Os vértices de um triângulo ABC são A (2, 5), B (4, 7) e C (–3, 6). O baricentro desse triângulo tem como coordenadas:

a) (3, 6)
b) (1, 6)
c) $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{11}{2}\right)$
d) $\left(\dfrac{3}{2}, 9\right)$
e) (9, 3)

09. (FMU-SP) Do triângulo **ABC** são dados:
I. A (3, 4) é um vértice;
II. B (–3, 2) é o segundo vértice;
III. G (1, 1) é o baricentro.

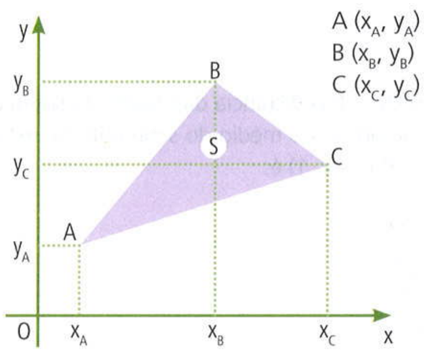
Então, **C**, o terceiro vértice do triângulo **ABC**, é:

a) (2, –1)
b) (3/2, 0)
d) (3, –3)
e) (–1, –2)
e) (5, 0)

"Os grandes momentos da vida vêm por si mesmo. Não tem sentido esperá-los."
Fonte: Thornton Wilder, escritor americano.

Área de um triângulo

Suponha que temos três pontos (não alinhados), sendo eles vértices de um triângulo:



A área da superfície **(S)** desse triângulo será dada por:

$$S = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}\right|$$

De forma mais simplificada:

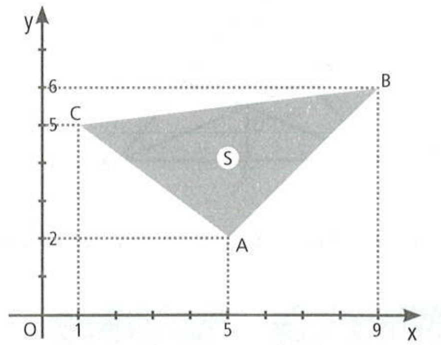
$$S = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_A & x_B & x_C & x_A \\ y_A & y_B & y_C & y_A \end{vmatrix}\right|$$

Conserva o sinal

As barras antes e depois dos determinantes indicam módulo.

Exercícios

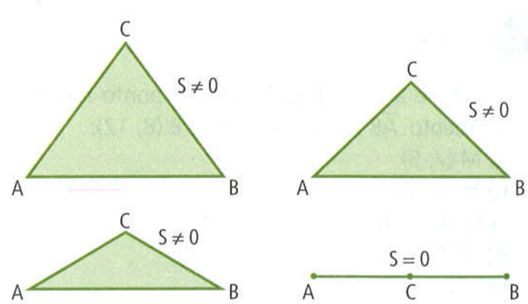
09. Calcule a área do triângulo abaixo:



10. Os pontos A (2, 4); B (–6, 2) e C (0, –2) são vértices de um triângulo **ABC**. Calcule a área desse triângulo.

Condição de alinhamento de três pontos

Sejam **A**, **B** e **C** os vértices de um triângulo, analise as figuras abaixo:



Podemos concluir, então, que a condição de alinhamento entre três pontos será dada por:

Inverte o sinal

$$\begin{vmatrix} x_A & x_B & x_C & x_A \\ y_A & y_B & y_C & y_A \end{vmatrix} = 0$$

Conserva o sinal

Exercícios

11. Os pontos A (3, 2); B (1, 4) e C (2, **a**) estão alinhados, nessas condições determine o valor de **a**:

12. Sejam os pontos A (0, y); B (1, 3) e C (3, 7), determine o valor de **y** para que os pontos estejam alinhados:

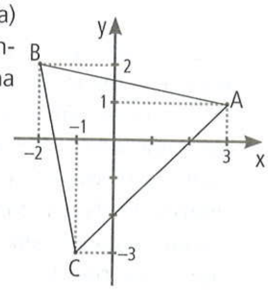
Testes

10. Seja o triângulo **ABC**, cujos vértices são A (0, 0), B (4, 0) e C (0, 5). A área desse triângulo é igual a:
a) 8 u.a.
b) 9 u.a.
c) 10 u.a.
d) 12 u.a.
e) 15 u.a.

11. Calcule a área do triângulo **ABC**, cujos vértices são A (2, 3); B (−1, 5) e C (4, −1):
a) 4 u.a.
b) 6 u.a.
c) 8 u.a.
d) 10 u.a.
e) 12 u.a.

12. Os pontos A (4, 6) e B (9, 7) formam com a origem um triângulo. Calcule sua área:
a) 13
b) 14
c) $\sqrt{13}$
d) $\sqrt{14}$
e) $\sqrt{5}$

13. (Fatec-SP/Adaptada) Calcule a área do triângulo **ABC**, indicados na figura:



a) 10
b) 12
c) 14
d) 15
e) 20

14. (FGV-SP) Os pontos (1, 3); (2, 7) e (4, k) do plano cartesiano estão alinhados se, e somente se:
a) k = 11
b) k = 12
c) k = 13
d) k = 14
e) k = 15

15. (UFMG) O valor de **m**, para que os pontos A (2**m** + 1, 2); B (−6, −5) e C (0, 1) sejam colineares, é:
a) −1
b) −1/2
c) 0
d) 1/2
e) 1

16. (PUC-SP) A (3, 5); B (1, −1) e C (x, −16) pertencem a mesma reta se **x** for igual a:
a) −5
b) −1
c) −3
d) −4
e) −2

17. (UTFPR) Os pontos (**x**, 1); (2, **x**) e (3, 1) estarão sobre a mesma reta se **x** for:
a) diferente de zero;
b) positivo;
c) negativo;
d) inteiro qualquer;
e) 1 ou 3.

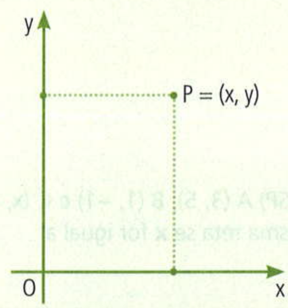
Leitura Complementar

Fermat promove o maior desafio da Matemática

Jurista e magistrado por profissão, **Pierre de Fermat** (1601-1665) dedicava à Matemática apenas nas suas horas de lazer e, mesmo assim, foi considerado por Pascal o maior matemático de seu tempo.

Coube a Fermat a entronização de eixos perpendiculares, a descoberta das equações da reta e da circunferência, e as equações mais simples de elipses, parábolas e hipérboles. Por mérito, as coordenadas cartesianas deviam denominar-se coordenadas **fermatianas**.

Cartesius é a forma latinizada de Descartes (René). Foi mais filósofo que matemático e em sua obra **Discours de la Méthode** (3.° apêndice, **La Géométrie**), publicada em 1637, se limitou a apresentar as ideias fundamentais sobre a resolução de problemas geométricos com utilização da Álgebra. Porém, é curioso observar que o sistema hoje denominado **cartesiano** não tem amparo histórico, pois sua obra nada contém sobre eixos perpendiculares, coordenadas de um ponto e nem mesmo a equação de uma reta.



Coordenadas cartesianas
ou fermatianas?

No entanto, Descartes "mantém um lugar seguro na sucessão canônica dos altos sacerdotes do pensamento, em virtude da têmpera racional de sua mente e sua sucessão na unidade do conhecimento. Ele fez soar o gongo e a civilização ocidental tem vibrado desde então com o espírito cartesiano de ceticismo e de indagação que ele tornou de aceitação comum entre pessoas educadas" (George Simmons). Segundo ainda este proeminente autor, **La Géométrie** "foi pouco lida então e menos lida hoje, e bem merecidamente".

E não há como resistir à tentação de expor um tópico lendário da Matemática: o Último **Teorema de Fermat**. Em 1637, estudando um exemplar da Aritmética de Diofanto (séc. III d.C.), Fermat deparou-se com o teorema:

A equação $x^n + y^n = z^n$ não admite solução para x, y, z inteiros e positivos, quando o expoente n for inteiro, positivo e maior que 2.

No livro de Diofanto, Fermat anotou: "encontrei uma demonstração verdadeiramente admirável para este teorema, mas a margem é muito pequena para desenvolvê-la".

Naturalmente, há quem duvide que ele tenha dito a verdade. Porém, além de íntegro, moralmente idôneo, hábil na teoria dos números, lembramos que Fermat jamais cometeu um engano ou disparate matemático.

Gerações inteiras de matemáticos têm maldito a falta de espaço daquela margem. Por mais de três séculos, praticamente todos os grandes expoentes da Matemática (entre eles Euler e Gauss) debruçaram-se sobre o assunto. Com o advento dos computadores foram testados milhões de algarismos com diferentes valores para x, y, z e n e a igualdade $x^n + y^n = z^n$ não se verificou. Assim empiricamente se comprova que Fermat tenha razão. Mas e a demonstração? Que tal um projeto para as suas próximas férias e alcançar a imortalidade?! Além disso, um renomado empresário e matemático alemão – Paul Wolfskehl – na noite que decidira suicidar-se em sua biblioteca, depara com o **Último Teorema de Fermat**, e muda de ideia. Em seu testamento, deixou em 1906 a quantia de 100 000 marcos para quem o demonstrasse.

Em 1993, Andrew Wiles, matemático da Universidade de Princeton (EUA), após 30 anos de fascínio, interrupções e paciente obstinação, apresentou a sua demonstração em 140 páginas. A notícia ocupou espaço nos noticiários do mundo inteiro. Bom demais para ser verdadeiro: matemáticos encontram um erro. Mais uma vítima do Enigma de Fermat? Em 1996, Wiles reapresenta a demonstração e sobre a qual não há qualquer contestação.

Cumpre esclarecer que Wiles utilizou conceitos avançadíssimos, com os quais Fermat nem poderia ter sonhado. Assim chega ao fim uma história épica na busca do Santo Graal da Matemática.

Propiciando notáveis avanços em vários ramos da matemática, a saga de 359 anos de tentativas, erros e acertos está admiravelmente descrita no livro *O Último Teorema de Fermat*, do autor inglês Simon Singh, com 300 páginas.

E o que pensa a comunidade dos matemáticos a respeito de Fermat? A maioria admite que ele escreveu com convicção que "a margem do livro era muito pequena", porém sua demonstração possuía erros.

Jocoso é o nova-iorquino anônimo que grafitou numa estação de metrô:

$$x^n + y^n = z^n$$

Descobri uma demonstração admirável para este teorema... porém, o trem está chegando! Que pena!

Disponível em: <www.geometriaanalitica.com.br>
Acesso em: 14 jul. 2010.

Estudo da reta

Equação geral da reta

A toda reta **r** do plano cartesiano de coordenadas cartesianas, está associada pelo menos uma equação da forma **Ax + By + C = 0**, onde **A**, **B** e **C** $\in$ **R**, sendo **A** $\neq$ **0** ou **B** $\neq$ **0** e o par ordenado (x, y) representa um ponto genérico da reta **r**.

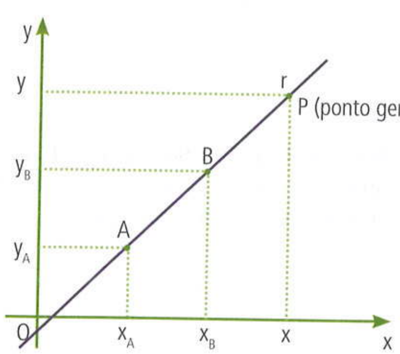
Observando o teorema acima, decorre que a todo ponto pertencente à reta **r** deve verificar a equação:

$$Ax + By + C = 0$$

Denominada **equação geral da reta**.

Equação da reta que passa por dois pontos

Dados dois pontos A (x_A, y_A); B (x_B, y_B) e um ponto P (x, y) qualquer, temos:



Observamos que os pontos **A**, **B** e **P** estão alinhados, portanto, pela condição de alinhamento entre três pontos, temos:

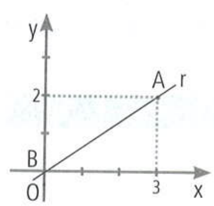
$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ou

Exercícios

13. Encontre a forma geral da reta que passa pelos pontos A (2, 3) e B (3, 2):

14. Observe o gráfico abaixo e determine a forma geral da equação da reta:



Equação reduzida da reta

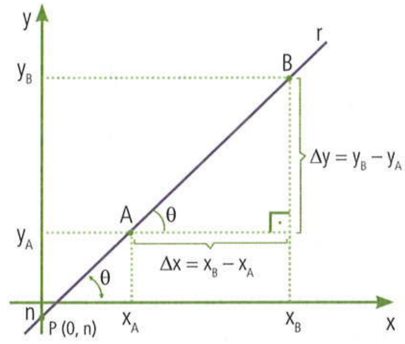
A **equação reduzida da reta** pode ser obtida isolando-se **y** na **equação geral da reta**. Sua forma é:

$$y = mx + n$$

Esta equação deixa bem evidente os valores do coeficiente angular (**declividade**) **m** e do coeficiente linear **n**, além de ser usada na linguagem de função:
y = f(x) = mx + n.

$$y = \underbrace{mx}_{\text{coeficiente angular}} + \underbrace{n}_{\text{coeficiente linear}}$$

Observe o gráfico:



O coeficiente linear é a ordenada **n** do ponto de intersecção da reta com o eixo das ordenadas (y).

O coeficiente angular **m** é igual a tangente da inclinação da reta.

$$m = \operatorname{tg} \theta \quad \text{ou} \quad m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

A inclinação θ é o ângulo medido a partir do semieixo positivo **Ox**, no sentido anti-horário, até a reta **r**.

A tabela abaixo mostra os valores para a tangente de alguns arcos:

θ	0°	30°	45°	60°
tg θ	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
90°	**120°**	**135°**	**150°**	**180°**
$\nexists$	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	0

Exercícios

15. Seja a reta **r** de equação $2x + y - 5 = 0$, determine os valores dos coeficientes angular (declividade) e linear dessa reta:

16. Considerando os pontos A (2, 3) e B (6, –1), determine:

a) A equação geral da reta que passa por A e B.

b) Os coeficientes angular e linear desta reta.

17. Sendo a reta que passa pelos pontos A (2, 4) e B (3, 5), obtenha:

a) A equação geral desta reta.

b) O coeficiente angular (declividade) da reta **r**.

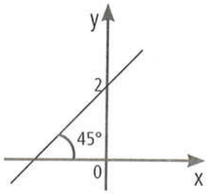
c) O coeficiente linear da reta **r**.

d) A inclinação (θ) da reta **r**.

e) Os pontos onde intercepta os eixos cartesianos.

f) A representação gráfica da reta **r**, indicando as coordenadas dos pontos de intersecção de **r** com os eixos das ordenadas e das abscissas.

18. Observando o gráfico abaixo, determine a equação geral da reta **s**:



Testes

18. Determine a equação da reta que passa pelos pontos A (1, 0) e B (–2, 1):

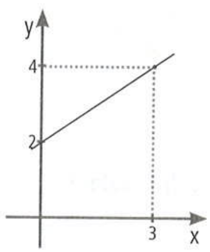
a) $x + 3y = 0$
b) $x - 3y + 1 = 0$
c) $-x + 3y + 2 = 0$
d) $x - 3y = 0$
e) $x + 3y - 1 = 0$

19. Os pontos (2, 1) e (4, –3) pertencem à reta **r**. Nestas condições determine a equação dessa reta:

a) $y = 2x$
b) $y = 2x - 5$
c) $y = 2x + 5$
d) $y = -2x + 5$
e) $y = -2x - 3$

20. (UCS-RS) A figura contém a representação gráfica da reta:

a) $2x - 3y + 6 = 0$
b) $2x + 3y - 6 = 0$
c) $3x - 2y + 6 = 0$
d) $2x - 3y - 2 = 0$
e) $2x + 3y + 2 = 0$



21. (Fasp) A equação da reta suporte do segmento **AB**, dados A (7, 11) e B (15, –1), é:

a) $2y - 3x - 24 = 0$
b) $3y - 2x + 17 = 0$
c) $3y - 2x + 7 = 0$
d) $2y + 3x - 43 = 0$
e) n.d.a.

22. (PUC-RS) A reta que "passa" pelos pontos (4, –1) e (2, 3) tem o mesmo coeficiente angular que a reta de equação:

a) $x + 2y = 7$
b) $x - 2y = 7$
c) $2x + y - 17 = 0$
d) $2x - y + 7 = 0$
e) $2x - 2y + 7 = 0$

23. (UFES) O valor de **k** para que a equação $kx - y - 3k + 6 = 0$ represente a reta que passa pelo ponto (5, 0) é:

a) 3
b) –9
c) 9
d) –3
e) –6

24. (FMU-SP) A reta da equação $2x + 3y - 5 = 0$ intercepta o eixo **y** no ponto:

a) (0, 5)
b) $\left(\frac{5}{3}, 0\right)$
c) $\left(0, \frac{5}{3}\right)$
d) $\left(0, -\frac{5}{3}\right)$
e) $\left(0, \frac{5}{2}\right)$

25. Encontre os coeficientes angular e linear da reta que passa pelos pontos A (1, –4) e B (5, 0).

a) $m = 1; n = 4$
b) $m = -1; n = -5$
c) $m = -1; n = 5$
d) $m = 1; n = -5$
e) $m = 1; n = 5$

26. Encontre os coeficientes angular e linear da reta que passa pelos pontos A (2, 5) e B (3, 6).

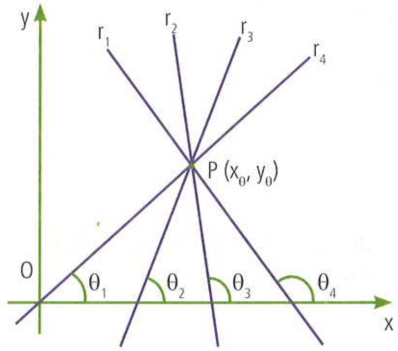
a) $m = 1; n = -3$
b) $m = 1; n = 3$
c) $m = -1; n = -3$
d) $m = -1; n = 3$
e) $m = 3; n = 2$

"O encanto da vida depende unicamente das boas amizades que cultivamos."

Fonte: Malba Tahan.

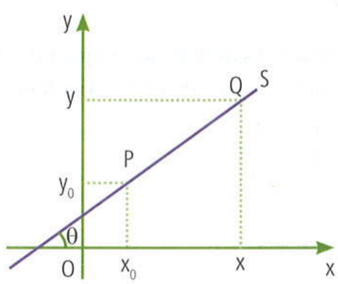
Equação da reta que passa por um ponto, conhecido o coeficiente angular (equação do feixe de retas)

Considerando-se um ponto P (x_o, y_o) e todas as retas que passam por ele, facilmente poderemos concluir que são infinitas as retas que passam por **P**. Porém, passando por **P** e com um ângulo θ em relação ao eixo x, só existe uma única reta. Observe:



As retas que passam pelo ponto **P** são denominadas **feixe de retas**, e o ponto **P** é conhecido por **centro** (ou vértice) **do feixe**.

Agora, tomamos uma reta qualquer do feixe (exceto uma que seja perpendicular ao eixo **x**):



Como vimos anteriormente, $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, aplicando esta relação na reta **s**, temos:

$$\boxed{m = \frac{y - y_o}{x - x_o}} \quad \text{ou} \quad \boxed{y - y_o = m(x - x_o)}$$

Esta equação, conhecida como **equação do feixe de retas**, permite-nos encontrar rapidamente a equação de uma reta, dado **um ponto e o coeficiente angular da reta**.

Exercícios

19. Qual a equação da reta que passa pelo ponto P (1, 2) e possui coeficiente angular m = 3?

20. Determine a equação da reta que passa por P (3, 4) e forma com o eixo **x** um ângulo de 135°:

21. Encontre a equação da reta de inclinação 60° e coeficiente linear igual a 2:

Posições relativas entre duas retas

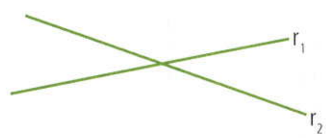
Dadas as retas:

$\mathbf{r_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0}$

$\mathbf{r_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0}$

Podemos ter três posições para essas duas retas:

1.ª) Concorrentes



$$\boxed{\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}}$$

2.ª) Paralelas

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}}$$

3.ª) Coincidentes

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}}$$

Exercício

22. Determine a posição relativa de cada par de retas indicadas abaixo:

a) $x - y + 1 = 0$ e $2x - y + 1 = 0$

b) $6x - 3y + 9 = 0$ e $2x - y + 3 = 0$

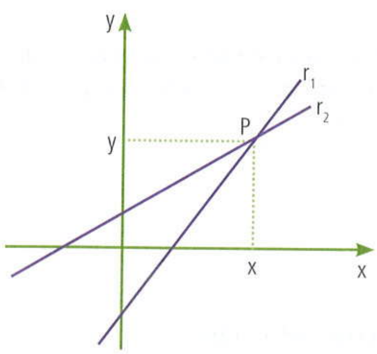
c) $2x + y - 5 = 0$ e $8x + 4y - 1 = 0$

Intersecção entre duas retas

Dadas as retas concorrentes:

$\mathbf{r_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0}$

$\mathbf{r_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0}$



O ponto **P**, ponto de intersecção entre as retas $\mathbf{r_1}$ e $\mathbf{r_2}$, é obtido resolvendo o sistema de equações formado por essas duas retas.

Exercício

23. Determinar o ponto de intersecção entre os pares de retas a seguir: espaços

a) $2x - 7y + 5 = 0$ e $3x + 7y - 10 = 0$

b) $x - y + 3 = 0$ e $2x - y + 5 = 0$

Testes

27. Determine a equação da reta que passa pelo ponto P (2, 1) e possui coeficiente angular igual a 2.

a) $2x - y - 3 = 0$
b) $2x + y - 3 = 0$
c) $2x - y + 3 = 0$
d) $2x + y + 3 = 0$
e) n.d.a.

28. (Osec-SP) A equação da reta que passa pelo ponto A (–3, 4) e cujo coeficiente angular é $\frac{1}{2}$ é:

a) $x + 2y + 11 = 0$
b) $x - y + 11 = 0$
c) $2x - y + 10 = 0$
d) $x - 2y + 11 = 0$
e) n.d.a.

29. Qual é a equação da reta que passa por (–2, 1) e tem inclinação de 45°?

a) $x - y + 3 = 0$
b) $x + y - 3 = 0$
c) $x - y + 1 = 0$
d) $x - y - 1 = 0$
e) $x + y + 1 = 0$

30. Sabendo que r_1: $x - y = 1$ e r_2: $x + y = 3$ são duas retas concorrentes, determine seu ponto de intersecção:

a) P (2, 1)
b) P (1, 2)
c) P (1, 3)
d) P (1, 1/2)
e) n.d.a.

31. Obtenha o ponto de intersecção das retas suportes dos segmentos **AB** e **CD**, dados A (3, 10); B (–2, 5); C (–2, 13) e D (7, 4):

a) (9, 2)
b) (–9, –2)
c) (2, 9)
d) (–2, –9)
e) (2, –9)

32. Determine o ponto de intersecção entre as retas concorrentes r_1: $y - 2x + 5 = 0$ e r_2 : $y + 3x + 20 = 0$:
a) P (0, 5)
b) P (–5, –5)
c) P (–5, 5)
d) P (5, 0)
e) P (5, 5)

33. Determine a equação da reta que passa pela intersecção das retas r_1: $y = x + 3$ e r_2: $y = -x + 9$ e forma um ângulo de 120° com o eixo x.
a) $y - x + \sqrt{3} - 6 = 0$
b) $y - \sqrt{3}x + 3\sqrt{3} + 6 = 0$
c) $y + \sqrt{3}x - 3\sqrt{3} - 6 = 0$
d) $y + \sqrt{3}x + 3\sqrt{3} - 6 = 0$
e) $y - x + 3\sqrt{3} - 6 = 0$

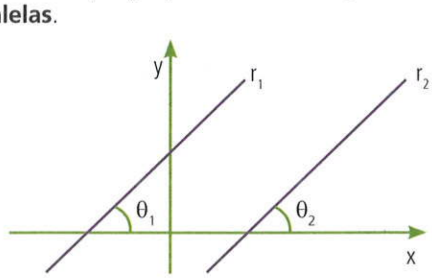
34. As retas r_1: $3x + 4y + 6 = 0$ e r_2: $5x - 4y + 2 = 0$ são:
a) paralelas;
b) coincidentes;
c) concorrentes;
d) reversas;
e) adjuntas.

35. As retas r_1: $5x + 6y + 7 = 0$ e r_2 : $10x + 12y + 14 = 0$ são:
a) reversas;
b) cofatoras;
c) paralelas;
d) coincidentes;
e) concorrentes.

36. As retas r: $3x + 5y + 10 = 0$ e s: $3x + 5y - 6 = 0$ são:
a) reversas;
b) adjuntas;
c) paralelas;
d) concorrentes;
e) coincidentes.

Retas paralelas

As retas r_1 e r_2 representadas na figura abaixo são **paralelas**.



Denominando-se por $\mathbf{m_1}$ e $\mathbf{m_2}$ os coeficientes angulares de $\mathbf{r_1}$ e $\mathbf{r_2}$, respectivamente, concluímos que:

$$r_1 \,//\, r_2 \rightarrow \theta_1 = \theta_2 \rightarrow tg\theta_1 = tg\theta_2$$

Logo: $\mathbf{m_1 = m_2}$

Ou seja, quando duas retas são paralelas elas possuem seus **coeficientes angulares iguais**.

Importante saber

Dada a reta **r**: $Ax + By + C = 0$
O feixe de retas paralelas à reta **r** dada é:
$Ax + By + K = 0$, com $K \in R$.

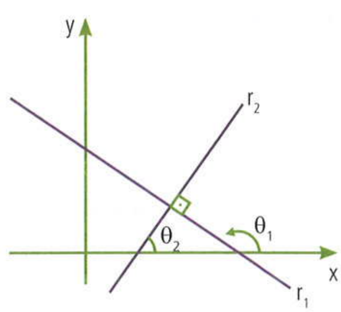
Exercícios

24. Dado o ponto P (–1, 3) e a reta r: $x - 2y + 8 = 0$, encontrar a equação da reta paralela a **r**, passando por **P**.

25. Determine a equação da reta **r**, paralela à reta **s** de equação $3x - y + 2 = 0$ e que passa pelo ponto A (2, –1).

Retas perpendiculares

As retas $\mathbf{r_1}$ e $\mathbf{r_2}$ representadas na figura abaixo são **perpendiculares**.



Denominando-se por $\mathbf{m_1}$ e $\mathbf{m_2}$ os coeficientes angulares de $\mathbf{r_1}$ e $\mathbf{r_2}$, respectivamente:

Se r_1 é perpendicular a r_2, então:

$\theta_1 = 90° + \theta_2$

$\text{tg}\,\theta_1 = \text{tg}\,(90° + \theta_2)$

$\text{tg}\,\theta_1 = \text{cotg}\,\theta_2$

$\text{tg}\,\theta_1 = -\dfrac{1}{\text{tg}\,\theta_2}$

Logo: $m_1 = -\dfrac{1}{m_2}$

Ou seja, quando duas retas são perpendiculares elas possuem **coeficientes angulares inversos e de sinais contrários**.

Importante saber

Dada a reta **r**: $Ax + By + C = 0$

O feixe de retas perpendiculares à reta **r** dada é:

$Bx - Ay + K = 0$, com $K \in \mathbb{R}$.

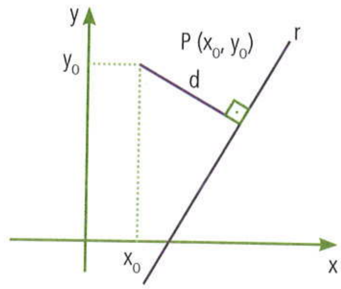
Exercícios

26. Encontre a equação da reta, perpendicular à reta de equação $3x + 2y - 1 = 0$ e que passa pelo ponto (2, 0).

27. Determine a equação da reta **m**, perpendicular à reta **n** de equação $2x + 3y - 7 = 0$, e que passa pelo ponto P (–2, –1).

Distância do ponto à reta

Vamos supor que, em um determinado problema, nos seja fornecido um ponto $P(x_0, y_0)$ e uma reta qualquer $Ax + By + C = 0$. A distância entre esse ponto à reta dada pode ser observada no gráfico a seguir:



Demonstra-se que a distância **d** é dada por:

$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

Importante saber

- O módulo | | indica que a distância não pode ser negativa.
- Se a distância for igual a zero, implica que o ponto $P(x_0, y_0)$ pertence à reta.
- Sejam as retas r_1: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ e r_2: $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, duas retas paralelas, a distância entre elas será dada por:

$$d = \left| \frac{C_1 - C_2}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

Exercícios

28. Calcule a distância do ponto P (1, 2) à reta **r** de equação $3x + 4y + 4 = 0$:

29. Calcule a distância entre as retas paralelas **r** e **s**, sendo r: $3x + 4y + 4 = 0$ e s: $3x + 4y - 1 = 0$:

Testes

37. (UFRGS) Dada a reta r: $2x - y + 1 = 0$, a equação da reta paralela a r pelo ponto P (1,1) será:

a) $2x - y = 0$
b) $2x - y + 2 = 0$
c) $2x + y + 1 = 0$
d) $2x + y - 1 = 0$
e) $2x - y - 1 = 0$

38. (PUC-PR) A reta **s** é perpendicular à reta de equação $x - 3y - 3 = 0$ e passa pelo ponto de coordenadas (0, 2). A equação de **s** é:

a) $3x - y - 3 = 0$
b) $3x + y - 2 = 0$
c) $y = \frac{x}{3} + 2$
d) $y = 3x + 2$
e) n.d.a.

39. (PUC-PR) As retas de equações $3x - 4y + 1 = 0$ e $4x + 3y - 5 = 0$ são:

a) perpendiculares;
b) paralelas;
c) concorrentes;
d) coincidentes;
e) n.d.a.

40. Sabe-se que as retas $2x - 3y + 3 = 0$ e $ax + y + 3 = 0$ são paralelas. O valor de **a** é:

a) 2/3
b) 3/2
c) –2/3
d) –3/2
e) n.d.a.

41. (PUC-SP) As retas $2x + 3y = 1$ e $6x - ky = 1$ são perpendiculares. Então **k** vale:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 6

42. (UFES) A equação da reta que passa pelo ponto P (2, –3) e é paralela à reta que passa pelos pontos A (4, 1) e B (–2, 2) é:

a) $x - 6y + 16 = 0$
b) $x + 6y - 16 = 0$
c) $x - 6y - 16 = 0$
d) $2x + 6y + 16 = 0$
e) $x + 6y + 16 = 0$

43. (FESP) A reta **r** passa pelo ponto P (1, 2) e é perpendicular à reta **s**: $2x + 3y - 6 = 0$. O ponto de intersecção de r com o eixo Oy é:

a) $\left(0, -\frac{1}{3}\right)$
b) $\left(0, \frac{1}{3}\right)$
c) $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$
d) $\left(0, \frac{1}{2}\right)$
e) $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$

44. A reta paralela a r: $y = 4x + 10$ e que passa pelo ponto A (1 –3) é:

a) $y + 4x - 10 = 0$
b) $y - 4x - 7 = 0$
c) $y + 4x - 7 = 0$
d) $y - 4x + 7 = 0$
e) $y - 4x - 10 = 0$

45. (PUC-PR) A distância P (1, –1) à reta de equação $y - 3x + 8 = 0$ é:

a) $\frac{3\sqrt{10}}{5}$
b) $\frac{2\sqrt{10}}{5}$
c) $\frac{3\sqrt{10}}{7}$
d) $\frac{6\sqrt{10}}{5}$
e) $\sqrt{10}$

46. (CESCEA-SP) A distância entre as retas paralelas $3y = 4x - 2$ e $3y = 4x + 8$ é:

a) $\sqrt{10}$
b) $\sqrt{5}$
c) $\sqrt{2}$
d) 2
e) n. d. a.

47. (PUC-SP) Qual a distância da origem à reta de equação $3x - 4y = 10$?

a) $\sqrt{2}$
b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
c) $\sqrt{10}$
d) 1
e) 2

48. (UNIMAR-SP) Dadas as equações das retas **r**: $3x + y - 3 = 0$ e s: $x + 3y - 6 = 0$, podemos afirmar que:

I. **r** e **s** são paralelas;

II. a reta (r) passa pelos pontos (1, 0) e (2, −3);

III. **r** e **s** são perpendiculares;

IV. a reta (s) passa pelos pontos (2, 0) e (3, 3).

Assinale a alternativa correta:

a) os itens (I) e (II) estão corretos;

b) os itens (II) e (III) estão incorretos;

c) os itens (II) e (IV) estão corretos;

d) os itens (III) e (IV) estão corretos;

e) os itens (I) e (IV) estão incorretos.

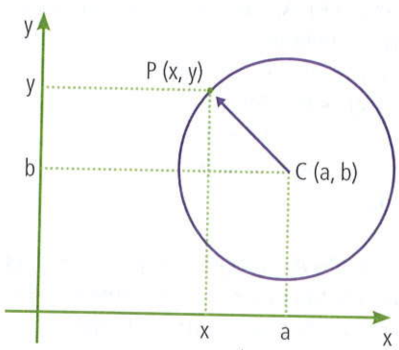
"O único homem que nunca comete erros é aquele que nunca faz coisa alguma. Não tenha medo de errar, pois você aprenderá a não cometer duas vezes o mesmo erro."

Fonte: Roosevelt.

Circunferência

É o lugar geométrico dos pontos de um plano que são equidistantes de um ponto fixo no mesmo plano. O ponto fixo **C** denomina-se centro da circunferência e a distância comum **R**, o raio.

Consideremos P (x, y) um ponto qualquer do plano que pertença à circunferência de centro C (a, b) e raio **R**:



No gráfico acima, temos:

- **P** pertence à circunferência;
- A distância (**d**) de **P** até **C** é igual ao raio da circunferência. (**d = R**)

Considerando que a distância entre dois pontos é dada por:

$$d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Como **d = R**, temos:

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R$$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

Denominada equação reduzida da circunferência

Se desenvolvermos os produtos notáveis:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = R^2$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$$

Substituindo o termo independente:

$$a^2 + b^2 - R^2 = c$$

Obtemos:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

Denominada equação geral da circunferência

- Se o centro **C** coincidir com a origem do sistema cartesiano, a equação será dada por:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

- A circunferência tangente ao eixo **x** terá **R = |b|**.
- A circunferência tangente ao eixo **y** terá **R = |a|**.

Obtenção do centro da circunferência: C (a, b)

$$a = \frac{\text{coeficiente de } x}{-2} \qquad b = \frac{\text{coeficiente de } y}{-2}$$

Obtenção do raio: R

$R^2 = a^2 + b^2 - c$

$$R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$$

Exercícios

30. Encontre a equação da circunferência de centro C (2, −1) e raio 5:

31. Determinar a equação da circunferência de centro na origem e raio unitário:

32. Determine a equação da circunferência tangente aos eixos no 2.º quadrante e raio igual a 2 cm:

33. Obtenha o centro e o raio da circunferência de equação $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 25$:

34. O centro e o raio da circunferência de equação $x^2 + y^2 - 8x - 4y - 5 = 0$ são, respectivamente:

35. Determine o raio da circunferência de equação $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 25 = 0$.

Testes

49. (Unifor-CE) O centro e o raio de uma circunferência de equação $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$ são, respectivamente:
a) (4, 9) e 2
b) (–2, –3) e 2
c) (2, 3) e 4
d) (–2, –3) e 4
e) (2, 3) e 2

50. (UFPA) O raio da circunferência $x^2 + y^2 - 2x = 3$ é:
a) $\sqrt{2}$
b) $\sqrt{3}$
c) 2
d) 3
e) 4

51. (PUC-RS) A distância entre os centros das circunferências de equações $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$ e $x^2 + y^2 - 49 = 0$ é:
a) 2
b) 3
c) 5
d) 7
e) 9

52. (PUC-PR) A circunferência $x^2 + y^2 - 2x = 0$:
a) tem centro no ponto (1, 0) e contém o ponto (–1, –1);
b) tem centro no ponto (0, 1) e contém a origem;
c) tem centro no ponto (1, 0) e é tangente ao eixo dos **y**;
d) é tangente ao eixo dos **x**;
e) n.d.a.

53. (Mackenzie-SP) A equação da circunferência de centro no ponto médio do segmento de extremos A (–1, 8) e B (7, –2) e raio 5 é:
a) $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 25$
b) $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 25$
c) $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 5$
d) $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 5$
e) $(x + 3)^2 + (y + 3)^2 = 25$

54. (PUC-PR) Achar a equação da circunferência que passa pelo ponto A (1, 1) com centro C (2, 1).
a) $x^2 + y^2 + 2x + y - 13 = 0$
b) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$
c) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 0$
d) $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 0$
e) n.d.a.

55. (UEL-PR) A equação $x^2 + y^2 - 2x = 0$ representa uma circunferência em um sistema de coordenadas cartesianas. Então, é correto afirmar:
a) O centro da circunferência pertence ao eixo **x**.
b) O ponto de coordenadas (fórmula) pertence à circunferência.
c) O raio da circunferência é 2.
d) A circunferência é tangente à reta x = 1.
e) A circunferência tem pontos com abscissas negativas.

56. (UECE) A equação da reta que passa pelo centro das circunferências $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 12 = 0$ e $x^2 + y^2 - 10x + 6y + 13 = 0$ é:
a) $5x + 2y - 19 = 0$

b) $5x + 2y + 19 = 0$
c) $2x + 5y - 19 = 0$
d) $2x + 5y + 19 = 0$
e) $2x - 5y + 19 = 0$

57. (Mackenzie-SP) O segmento de extremidade P (2, 8) e Q (4, 0) é o diâmetro de uma circunferência cuja equação é:
a) $(x + 13)^2 + y^2 = 289$
b) $(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 85$
c) $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 34$
d) $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 43$
e) $(x - 7)^2 + (y - 5)^2 = 34$

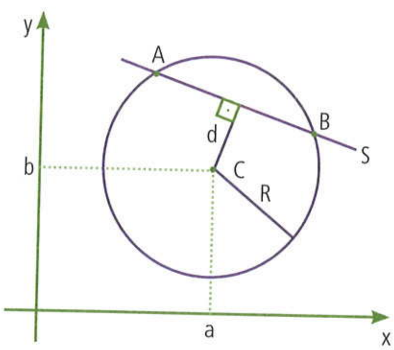
58. (PUC-PR) A soma das coordenadas do centro da circunferência de equação $2x^2 + 2y^2 - 6x - 2y - 3 = 0$ é:
a) 2
b) –2
c) 1
d) 4
e) 0

> "Superar o fácil não tem mérito, é obrigação; vencer o difícil é glorificante; ultrapassar o outrora impossível é esplendoroso."
> **Fonte:** Alexandre Fonteles.

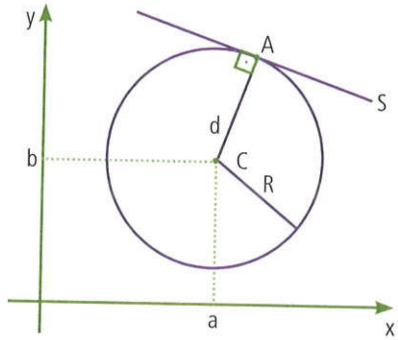
Posição relativa entre reta e circunferência

Seja uma reta **s** e uma circunferência, podemos determinar a posição relativa entre elas estabelecendo uma relação entre a distância do centro à reta (d) e o raio (R) da circunferência.

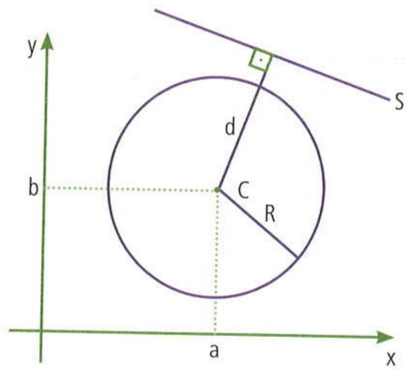
Se **d < R**, a reta é secante à circunferência (intercepta a circunferência em dois pontos).



Se **d = R**, a reta é tangente à circunferência (intercepta a circunferência em apenas um ponto).



Se **d > R**, a reta é externa à circunferência (não intercepta a circunferência).



Exercício

36. Estudar as posições relativas das circunferências e retas abaixo: espaços
a) $x^2 + y^2 - 6x + 1 = 0$ e a reta $y = x - 7$

b) $x^2 + y^2 + 8x - 6y = 0$ e a reta $4x + 3y + 27 = 0$

c) $x^2 + y^2 = 4$ e a reta $3x + 4y + 15 = 0$

Testes

59. (UEL-PR) A distância do centro da circunferência $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ e a reta $4x - 3y = 0$ é:

a) 10
b) 8
c) 5
d) 2
e) 1

60. Em relação à circunferência de equação $x^2 + y^2 + 4x - 8y - 20 = 0$, a reta de equação **y** $= 2x - 1$:

a) é externa;
b) é tangente;
c) é secante;
d) contém a origem;
e) contém o ponto P (1, 4).

61. (FGV-SP) A reta de equação $3x + 4y = 0$ tangencia a circunferência $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = r^2$. O raio **r** da circunferência vale:

a) $\frac{1}{2}$
b) 1
c) $\frac{3}{4}$
d) 2
e) $\frac{7}{8}$

62. (AMAN-RJ) A equação da reta tangente à circunferência de centro (–2, 1) no ponto (–3, 3) é:

a) $x - 2y + 9 = 0$
b) $x + 2y - 9 = 0$
c) $2x + y + 1 = 0$
d) $2x + y - 1 = 0$
e) $2x + y - 9 = 0$

63. (Mackenzie-SP) Em relação à circunferência $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 169$, a reta $5x + 12y - 198 = 0$ é:

a) secante;
b) tangente;
c) externa;
d) coincidente com a reta que contém o diâmetro;
e) n.d.a.

64. (PUC-SP) A circunferência com centro na origem e tangente à reta $3x + 4y = 10$ tem equação:

a) $x^2 + y^2 = 1$
b) $x^2 + y^2 = 2$
c) $x^2 + y^2 = 3$
d) $x^2 + y^2 = 4$
e) $x^2 + y^2 = 5$

65. A reta r: $y - x + 4 = 0$ e a circunferência $x^2 + y^2 = 4$:

a) são secantes;
b) são tangentes;
c) a reta é externa à circunferência;
d) são adjuntas;
e) n.d.a.

66. A reta r: $y + x + 12 = 0$ e a circunferência $(x + 6)^2 + (y + 6)^2 = 36$:

a) são secantes;
b) são tangentes;
c) a reta é exterior à circunferência;
d) são concêntricas;
e) n.d.a.

Respostas

Exercício 01: Em sala.

Exercício 02: a) M (10, 3); b) M (–3, –3)

Exercício 03: (4, 2)

Exercício 04: d = 5 u.c.

Exercício 05: $d = 2\sqrt{2}$ u.c.

Exercício 06: x = 13; x = – 3

Exercício 07: $x_G = 3$ e $y_G = 2$

Exercício 08: $x_G = 2$ e $y_G = -2$

Exercício 09: S = 14 u.a.

Exercício 10: S = 22 u.a.

Exercício 11: a = 3

Exercício 12: y = 1

Exercício 13: y + x – 5 = 0 ou – x – y + 5 = 0

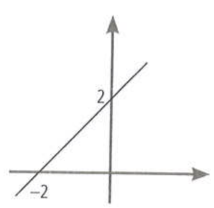
Exercício 14: 3y – 2x = 0 ou 2x – 3y = 0

Exercício 15: m = –2; n = 5

Exercício 16: a) y + x – 5 = 0 ou – y – x + 5 = 0;
b) m = –1, n = 5.

Exercício 17: a) y – x –2 = 0 ou x – y + 2 = 0; b) m = 1;
c) n = 2; d) 45°; e) A (0, 2), B (–2, 0)

f)



Exercício 18: y = x + 2

Exercício 19: y = 3x – 1 ou y – 3x + 1 = 0
ou –y + 3x – 1 = 0

Exercício 20: y + x – 7 = 0 ou –y – x + 7 = 0
ou y = –x + 7

Exercício 21: $y = \sqrt{3}x + 2$ ou $-y + \sqrt{3}x + 2 = 0$
ou $y = \sqrt{3}x + 2$

Exercício 22: a) Concorrentes; b) Coincidentes;
c) Paralelas.

Exercício 23: a) P (1, 1); b) P (–2, 1).

Exercício 24: x – 2y – 7 = 0

Exercício 25: 3x – y – 7 = 0

Exercício 26: 2x – 3y – 4 = 0

Exercício 27: 3x – 2y + 4 = 0

Exercício 28: d = 3 u.c.

Exercício 29: d = 1 u.c.

Exercício 30:
$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$ ou $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 25$

Exercício 31: $x^2 + y^2 - 1 = 0$

Exercício 32:
$x^2 + y^2 + 4x - 4y = 0$ ou $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$

Exercício 33: C (3, – 4) e R = 5

Exercício 34: R = 5 e C (4, 2)

Exercício 35: R = 3

Exercício 36: a) Tangentes; b) Secantes; c) Reta exterior ou externa à circunferência.

Gabarito

01) D	02) D	03) E	04) A	05) D	06) E
07) C	08) B	09) C	10) C	11) A	12) A
13) B	14) E	15) C	16) D	17) E	18) E
19) D	20) A	21) D	22) C	23) D	24) C
25) D	26) B	27) A	28) D	29) A	30) A
31) C	32) E	33) C	34) C	35) D	36) C
37) E	38) B	39) A	40) A	41) D	42) E
43) D	44) D	45) B	46) D	47) E	48) E
49) E	50) C	51) C	52) C	53) C	54) B
55) A	56) A	57) D	58) D	59) D	60) C
61) B	62) A	63) B	64) D	65) C	66) A